

Electromagnetismo I & II

Martín Otero Lema

Prefacio:

Estos son unos apuntes de las asignaturas de electromagnetismo I y II para el segundo año del grado en física de la USC. Su objetivo es condensar en un solo documento el contenido de estas dos asignaturas, de manera espero que más o menos clara.

Aún así, tened en cuenta que esta no es la versión final de los apuntes, ya que faltan algunas cosas y gran parte de su contenido está sin revisar, así que si hay algo que os parezca raro, probablemente sea que la he cagado yo. Cualquier fallo que encontréis, agradecería muchísimo que me lo mandaseis a *martin.otero.lemma@rai.usc.es* para poder corregirlo lo antes posible (que probablemente sea despues de los exámenes de enero). Muchas gracias y ánimo con la asignatura.

Martín Otero

Índice general

I Electromagnetismo I	7
1. Introducción al análisis vectorial	9
1.1. Gradiente, divergencia y rotacional	9
1.1.1. Gradiente	9
1.1.2. Divergencia	9
1.1.3. Rotacional	9
1.2. Teoremas fundamentales del análisis vectorial	10
1.3. Teorema de Helmholtz	11
2. Electrostática en el vacío	13
2.1. El campo electrostático	14
2.1.1. La ley de Gauss	14
2.1.2. Funciones de potencial del campo electrostático	16
2.1.3. Ecuaciones de Poisson y de Laplace	18
2.2. Teorema de Earnshaw	18
2.2.1. Condiciones para un equilibrio estable	18
2.2.2. Formulación y demostración del teorema	18
2.2.3. Regiones provistas de carga	19
2.2.4. Significado físico	19
2.3. El dipolo eléctrico.	19
2.4. Expansión multipolar del potencial escalar eléctrico	20
2.5. La función delta de Dirac	23
3. Electrostática en medios materiales	29
3.1. Conductores en equilibrio electrostático	29
3.1.1. Blindaje utilizando conductores	31
3.1.2. La jaula de Faraday	32
3.1.3. El efecto punta	33
3.2. Medios dieléctricos	34
3.2.1. Densidades de carga de polarización	34
3.2.2. El vector desplazamiento eléctrico	36
3.2.3. El tensor susceptibilidad eléctrica	36
3.3. Condiciones de contorno en la separación entre medios	37
3.3.1. Continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E}	37
3.3.2. Discontinuidad en las componentes normales de \vec{D}	37
3.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos	38
3.5. El electreto	39
4. Energía y fuerzas electrostáticas.	43
4.1. Energía de configuración de un sistema de cargas puntuales	43
4.1.1. Energía almacenada en distribuciones continuas	44
4.2. Energía electrostática en términos de cantidades de campo	45

4.2.1. Ejemplo: Energía almacenada en un condensador.	46
4.3. Energía de polarización	47
4.3.1. Energía de polarización desde el punto de vista del campo	49
4.4. Fuerza electrostática entre las placas de un condensador	49
4.4.1. Condensador aislado	50
4.4.2. Condensador conectado a baterías	50
4.5. Presión electrostática	52
4.5.1. Ejemplo: Esfera cortada por un plano	53
4.6. Autoenergía electrostática	55
5. Métodos especiales en electrostática.	57
5.1. Unicidad de solución de la ecuación de Laplace	57
5.2. Unicidad de solución de la ecuación de Poisson	58
5.3. Método de las imágenes	60
5.3.1. Ejemplo 1: Carga puntual enfrentada a un plano conductor	61
5.3.2. Ejemplo 2: Carga puntual enfrentada a una esfera conductora	62
5.4. Solución de la ecuación de Laplace	64
5.4.1. Ejemplo: Potencial generado por una corteza esférica.	65
6. Corrientes eléctricas estacionarias.	69
6.1. Vector densidad de corriente	69
6.1.1. Relación con los portadores de carga	70
6.1.2. Distribuciones de corriente superficiales y filamentosas	70
6.2. El principio de conservación de la carga. Ecuación de continuidad	71
6.2.1. Corrientes estacionarias	72
6.2.2. Corrientes de polarización	73
6.3. Tensor conductividad eléctrica. La ley de Ohm	73
6.4. Condiciones de frontera. Refracción del campo eléctrico	74
6.5. Resistencia y capacidad	76
6.6. Transición hacia el equilibrio electrostático	77
6.7. Circuitos eléctricos	77
6.7.1. Relaciones energéticas. La ley de Joule	79
6.7.2. Leyes de Kirchhoff	80
II Electromagnetismo II	83
7. Magnetostática en el vacío	85
7.1. Postulados en el espacio libre	85
7.2. Funciones de potencial del campo magnético	85
7.3. La ley de Lorentz	86
7.3.1. Trabajo realizado por el campo magnético	86
7.3.2. Trabajo electromagnético	86
7.4. Ley de Biot-Savart	87
7.4.1. Corrientes superficiales y filamentosas	88
7.5. Ley de Ampère	88
7.5.1. Ejemplo: Campo generado por un cilindro	89
7.5.2. Ejemplo: Campo generado por un solenoide ideal infinito	90
7.5.3. Ejemplo: Campo generado por un toroide	92
7.6. Ley de fuerzas de Ampère	94
7.7. Partículas en campos magnéticos uniformes	97

8. Magnetostática en medios materiales	101
8.1. Expansión multipolar del potencial vector	101
8.1.1. Interacción campo-dipolo	102
8.2. Medios magnéticos	104
8.2.1. Corrientes de magnetización	105
8.2.2. La intensidad de campo magnético \vec{H}	107
8.2.3. El tensor susceptibilidad magnética	107
8.2.4. Potencial escalar magnético	108
8.3. Clasificación de los materiales magnéticos	109
8.3.1. Dominios magnéticos. Ciclo de histéresis	110
8.3.2. Materiales ferromagnéticos duros y blandos	111
8.4. Condiciones de contorno en la separación entre medios	112
8.4.1. Medios l.h.i	112
8.4.2. Medios de imanación arbitraria	113
8.5. Circuitos magnéticos	113
8.5.1. Leyes de Kirchhoff para circuitos magnéticos	114
9. Campos variables en el tiempo I	117
9.1. Inducción electromagnética. La ley de Faraday	117
9.1.1. Circuito estacionario en un campo variable	117
9.1.2. Circuito móvil en un campo variable	118
9.2. Inductancias e inductores	118
9.2.1. Autoinducción	119
9.3. Energía magnética	120
9.3.1. Energía magnética en términos de cantidades de campo	122
9.3.2. Energía disipada en un ciclo de histéresis	123
9.3.3. Fuerzas magnéticas	125
10. Campos variables en el tiempo II	127
10.1. Ecuación de Ampère-Maxwell	127
10.2. Ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B}	128
10.2.1. Ecuación de onda para el campo eléctrico	128
10.2.2. Ecuación de onda para el campo magnético	129
10.2.3. Soluciones a las ecuaciones de Maxwell	129
10.3. Funciones de potencial	130
10.3.1. Ecuación para el potencial vector	130
10.3.2. Ecuación para el potencial escalar	131
10.4. Transformaciones gauge	131
10.4.1. Gauge de Coulomb	133
10.4.2. Gauge de Lorenz	133
10.5. Soluciones a la ecuación de ondas. Potenciales retardados.	134
10.6. Fasores	138
10.6.1. Derivadas e integrales en notación fasorial	139
10.6.2. Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial	140
10.6.3. Potenciales cuasiestacionarios	140
10.7. Teorema de Poynting	141
10.7.1. Medios l.h.i	142
10.8. Ondas electromagnéticas planas	143
10.8.1. Impedancia intrínseca	145
10.8.2. Superposición de soluciones	146
10.8.3. Polarización de ondas planas	148
10.9. Ondas planas en medios con pérdidas	149
10.9.1. Medios con pequeñas pérdidas	152
10.9.2. Buenos conductores	153

10.10	Densidades de potencia instantánea y media	155
10.11	Caso general. Propagación en direcciones arbitrarias	156
10.11.1	Expresión general para $\langle \vec{S} \rangle$	157
10.12	Ondas en direcciones opuestas	158
10.12.1	Ejemplo: Onda estacionaria en el vacío	159
11.	Circuitos de corriente alterna	161
11.1.	Limitaciones de la teoría de circuitos. Campos de variación lenta	161
11.2.	Voltajes y diferencias de potencial	162
11.3.	Señales periódicas	164
11.4.	Resistencias, inductores y condensadores	164
11.4.1.	Resistencias	164
11.4.2.	Inductores	164
11.4.3.	Condensadores	165
11.5.	Impedancia	165
11.6.	Análisis de circuitos	166
11.6.1.	Valores eficaces	167
11.7.	Potencia en un circuito alterno	167
11.8.	Potencia activa y factor de potencia	168
11.8.1.	Potencia reactiva y potencia aparente	169
11.8.2.	Teorema de Tellegen	169
11.9.	Resonancia en un circuito RLC en serie	170
11.10	Factor de calidad	171
11.10.1	Circuito RL en serie	171
11.10.2	Circuito RC en serie	171
11.10.3	Circuito RLC en serie	172
11.11	Teoremas de Thévenin y Norton	173
11.12	Transformadas de Laplace	174
11.12.1	Transformada inversa	175
11.12.2	Algunas transformadas útiles	175
11.12.3	Propiedades de la transformada	176
11.12.4	Aplicaciones para la resolución de circuitos	177
12.	Líneas de transmisión y antenas	181
12.1.	Introducción a las líneas de transmisión	181
12.2.	Modelo de conductor: línea coaxial	182
12.3.	Modelo de parámetros distribuidos	184
12.3.1.	Parámetros distribuidos en una línea coaxial	188
12.4.	Coefficiente de reflexión	188
12.5.	Relaciones de tensión	190
12.6.	Antenas y campos lejanos	190

Parte I

Electromagnetismo I

Capítulo 1

Introducción al análisis vectorial

A lo largo del desarrollo del temario, nos apoyaremos en varios conceptos matemáticos que nos ayudaran a establecer el formalismo que describe el comportamiento de los campos electromagnéticos. Esta sección está dedicada al repaso de estas ideas, de forma muy resumida.

1.1. Gradiente, divergencia y rotacional

Recordemos el significado del gradiente de un campo escalar y de la divergencia y rotacional de un campo vectorial.

1.1.1. Gradiente

Sea A un campo escalar cualquiera. Su gradiente se denota como.

$$\text{grad}(A) \equiv \nabla A \quad (1.1)$$

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial, que apunta en la dirección en la que aumentan los valores de A .

1.1.2. Divergencia

Sea ahora \vec{A} un campo vectorial. Denotaremos su divergencia de la siguiente manera.

$$\text{div}(\vec{A}) \equiv \nabla \cdot \vec{A} \quad (1.2)$$

La divergencia de un campo vectorial es un campo escalar, y nos ofrece información acerca del comportamiento de las líneas de campo. Más concretamente, la divergencia nos indica las fuentes y sumideros de líneas de campo. Aquellas regiones donde $\nabla \cdot \vec{A} > 0$ son fuentes de campo, lugares donde "nacen" las líneas de campo. Al contrario, las regiones donde $\nabla \cdot \vec{A} < 0$ son sumideros de campo, lugares donde "mueren" estas líneas. Finalmente, uno podría preguntarse que ocurre cuando $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. En estas regiones, el campo se conoce como solenoidal, y no tiene ni fuentes ni sumideros, condición que impone que las líneas de campo sean cerrada (o, en ciertos casos que veremos más adelante, que se prolonguen hasta el infinito manteniéndose constantes)

1.1.3. Rotacional

Sea de nuevo \vec{A} un campo vectorial. Denotaremos su rotacional como.

$$\text{rot}(\vec{A}) \equiv \nabla \times \vec{A} \quad (1.3)$$

Al contrario que la divergencia, el rotacional de un campo vectorial es otro campo vectorial. El significado intuitivo del rotacional es menos evidente que el del gradiente o el de la divergencia, pero se puede interpretar como una medida de la inhomogeneidad de las líneas de campo. Para ello podemos pensar en un campo radial (todas sus líneas de campo son rectas y parten del origen). Si el comportamiento de las líneas de campo (el módulo del campo vectorial) no depende de la dirección, el rotacional será nulo; sin embargo si el módulo del campo se comporta de manera diferente en función del ángulo (rompiendo así la simetría), tendríamos un rotacional no nulo.

1.2. Teoremas fundamentales del análisis vectorial

Estos tres teoremas resultan clave para simplificar en gran medida el trabajo con campos tanto escalares como vectoriales. En estos apuntes nos limitaremos a enunciarlos sin demostración, ya que no es material de esta asignatura.

Teorema del gradiente: Si ϕ es un campo escalar cualquiera y Γ es un camino que une los puntos a y b , entonces se verifica la siguiente igualdad.

$$\int_{\Gamma} \nabla \phi \cdot d\vec{l} = \phi(b) - \phi(a) \quad (1.4)$$

Este teorema pone de manifiesto que si un determinado campo vectorial se puede obtener a través del gradiente de una función escalar, su circulación entre dos puntos a y b no depende del camino escogido. A estos campos se los conoce como campos conservativos. Una propiedad de estos campos que se deriva directamente del teorema del gradiente es que si \vec{A} es un campo conservativo y γ un camino cerrado cualquiera.

$$\oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.5)$$

Teorema de la divergencia: Sea \vec{A} un campo vectorial cualquiera, S una superficie cerrada arbitraria y τ la región contenida en el interior de la superficie S . El teorema de la divergencia establece que.

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{A}) dV \quad (1.6)$$

Donde los vectores $d\vec{s}$ están escogidos de tal manera que apuntan al exterior de la superficie cerrada. Gracias a este teorema podemos ahondar en el concepto de campo solenoidal. Antes dijimos que las líneas de cualquier campo que verifique que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ han de ser forzosamente cerradas. Utilizando el teorema de la divergencia, este es un resultado sencillo de entender, ya que para estos campos, su flujo a través de cualquier superficie cerrada ha de ser nulo, por lo que las líneas de campo que entran han de salir también, y por lo tanto sus líneas de campo son cerradas.

Teorema del rotacional: Sea de nuevo \vec{A} un campo vectorial, y sean S una superficie abierta cualquiera y C el contorno cerrado que limita a dicha superficie. Se verifica la siguiente relación.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \quad (1.7)$$

A partir de este teorema se puede deducir una importante relación. Consideremos el caso en el que \vec{A} es un campo conservativo ($\vec{A} = \nabla \phi$). Entonces, según la expresión 1.5, tendremos que.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.8)$$

E introduciendo esto en la expresión 1.7.

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.9)$$

Y como esto tiene que cumplirse sea cual sea la superficie abierta S , llegamos a la conclusión de que.

$$\vec{A} = \nabla\phi \implies \nabla \times \vec{A} = 0 \quad (1.10)$$

Es sencillo ver que aplicando la misma lógica, pero partiendo de que $\nabla \times \vec{A} = 0$ se puede llegar a la relación inversa. Por lo tanto.

$$\vec{A} = \nabla\phi \iff \nabla \times \vec{A} = 0 \quad (1.11)$$

1.3. Teorema de Helmholtz

Este teorema será de gran importancia en el desarrollo axiomático del electromagnetismo, ya que establece que si se conocen los valores de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial en una determinada región finita, entonces ese campo está unívocamente determinado en el interior de dicha región. Supongamos entonces que \vec{F} es un campo vectorial, y que para el interior de una región finita contenida en una superficie cerrada S y que delimita un volumen τ , conocemos la divergencia y el rotacional de \vec{F} .

$$\nabla \cdot \vec{F} = \alpha(\vec{r}) \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \beta(\vec{r}) \quad (1.13)$$

Ahora podemos definir las siguientes funciones.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\alpha(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.14)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\beta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.15)$$

A partir de estas funciones es posible obtener el campo \vec{F} , que vendrá dado por.

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} - \nabla\phi \quad (1.16)$$

Así pues, a partir de ahora sabemos que conocer la divergencia y el rotacional del campo electromagnético en todo el espacio nos permite calcular su valor en cualquier punto.

Capítulo 2

Electrostática en el vacío

Comenzaremos este tema introduciendo el concepto de carga eléctrica. La carga, que denotaremos con la letra Q , es una propiedad de la materia. Los fenómenos electromagnéticos surgen de las interacciones entre varias distribuciones de carga. No obstante, es necesario aclarar a que nos estamos refiriendo cuando hablamos de distribuciones de carga, ya que es un hecho conocido que la carga está cuantizada. Esto quiere decir que existe una cantidad fundamental de carga, la carga del electrón ($e^- = -1,602 \cdot 10^{-19}C$). Así pues, para cualquier objeto, su carga se podrá expresar como.

$$Q = n \cdot |e^-|, n \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

Al estar la carga cuantizada, y como desde el punto de vista clásico el electrón se comporta como un punto material, rigurosamente no se puede definir una distribución continua de carga. Sin embargo, si trabajamos con volúmenes lo suficientemente grandes como para contener un gran número de partículas portadoras de carga (lo cual es razonable, ya que generalmente trabajamos a escalas muy superiores a la atómica), podremos considerar que existen las distribuciones continuas de carga. Para llegar a ellas, comenzaremos considerando la siguiente función discreta.

$$\rho_{discreta} = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (2.2)$$

Si ahora tomamos el límite $\Delta V \rightarrow 0$, con la distinción de que ΔV sigue siendo lo suficientemente grande desde un punto de vista microscópico, llegamos a la definición de la densidad volumétrica de carga.

$$\rho_v = \frac{dQ}{dV} \quad (2.3)$$

De forma totalmente análoga se pueden deducir las expresiones para las densidades lineales y superficiales de carga.

$$\rho_s = \frac{dQ}{ds} \quad (2.4)$$

$$\rho_l = \frac{dQ}{dl} \quad (2.5)$$

De estas tres ecuaciones se desprende que, conocida la densidad de carga, la carga total vendrá dada por.

$$Q = \int_v \rho_v dv \quad (2.6)$$

$$Q = \int_S \rho_s ds \quad (2.7)$$

$$Q = \int_L \rho_l dl \quad (2.8)$$

2.1. El campo electrostático

Experimentalmente se comprueba que al introducir un carga q en una región donde exista campo eléctrico, esta experimenta una fuerza \vec{F} . El vector campo eléctrico, \vec{E} , se define como.

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (2.9)$$

El motivo de hacer tender a cero el valor de q es porque de esta manera se garantiza que esta carga "de prueba" no está perturbando el campo electrostático presente en esa región. Por supuesto, si conocemos el valor del campo electrostático podremos conocer el valor de la fuerza que experimentará una carga q en el interior del campo.

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (2.10)$$

Como ya hemos visto durante la introducción, para conocer un campo nos llega con saber el valor de su divergencia y su rotacional. Los dos postulados básicos de la electrostática en el espacio libre, obtenidos a partir de la evidencia experimental y del trabajo de físicos como Maxwell, son precisamente la divergencia y el rotacional del campo electrostático.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Donde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F/m$ es la permeabilidad dieléctrica del vacío. A partir de estas dos ecuaciones es posible obtener todas las relaciones electrostáticas en el espacio libre.

2.1.1. La ley de Gauss

Fijémonos en la ecuación que nos da el valor de la divergencia de \vec{E} , e integremos ambos miembros en un volumen arbitrario τ que está delimitado por una superficie cerrada S .

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_v dv \quad (2.12)$$

Si ahora utilizamos el teorema de la divergencia en el primer miembro de esta igualdad, obtenemos la siguiente expresión para el flujo del campo \vec{E} .

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_v dv \quad (2.13)$$

Y si recurrimos a la expresión 2.6, el segundo miembro no es más que la carga total encerrada en el volumen τ . Sustituyendo, llegamos a la expresión de la ley de Gauss.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

Esta ecuación pone de manifiesto que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada tan solo depende de la cantidad de carga que se encuentra en su interior, no de la distribución de la misma. Para ciertos escenarios con un elevado nivel de simetría es posible emplear este resultado para calcular el campo eléctrico.

Ejemplo: Campo eléctrico generado por una carga puntual

Consideremos una carga puntual q en el vacío. Estamos frente a una situación con simetría esférica, ya que mientras nos mantengamos a una cierta distancia de la carga, veremos lo mismo sea cual sea el ángulo respecto a unos ciertos ejes centrados en la carga. Así pues, por la simetría del problema podremos afirmar lo siguiente acerca del campo creado por la carga puntual.

$$\vec{E} = |\vec{E}|(r) \hat{r} \quad (2.15)$$

Si ahora consideramos una corteza esférica de radio R centrada en el origen de coordenadas, podemos calcular de forma simple el flujo del campo eléctrico a través de esa superficie.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S |\vec{E}|(R) \hat{r} \cdot d\vec{s} = \int_S |\vec{E}|(R) ds \quad (2.16)$$

Como sabemos que el módulo de \vec{E} ha de ser constante en toda la superficie esférica puede salir de la integral.

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = |\vec{E}| \int_S ds = 4\pi R^2 |\vec{E}| \quad (2.17)$$

Ahora podemos utilizar la ecuación 2.14 para llegar a lo siguiente

$$4\pi R^2 |\vec{E}| = \frac{q}{\epsilon_0} \implies |\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.18)$$

Y ahora, sin más que utilizar 2.15 llegamos a la forma del vector campo eléctrico.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} \quad (2.19)$$

Ejemplo: Campo eléctrico generado por un plano infinito

Consideremos un plano infinito dotado de una distribución superficial de carga $\rho_s = cte > 0$. Si escogemos un sistema de ejes tal que el plano es perpendicular al eje OZ , es claro que el campo eléctrico solo podrá depender de la coordenada z , ya que al ser el plano infinito, tenemos simetría en x e y . En cuanto al sentido del campo, este irá en dirección $+OZ$ si $z > 0$ y en dirección $-OZ$ si $z < 0$. Consideremos ahora la siguiente superficie.

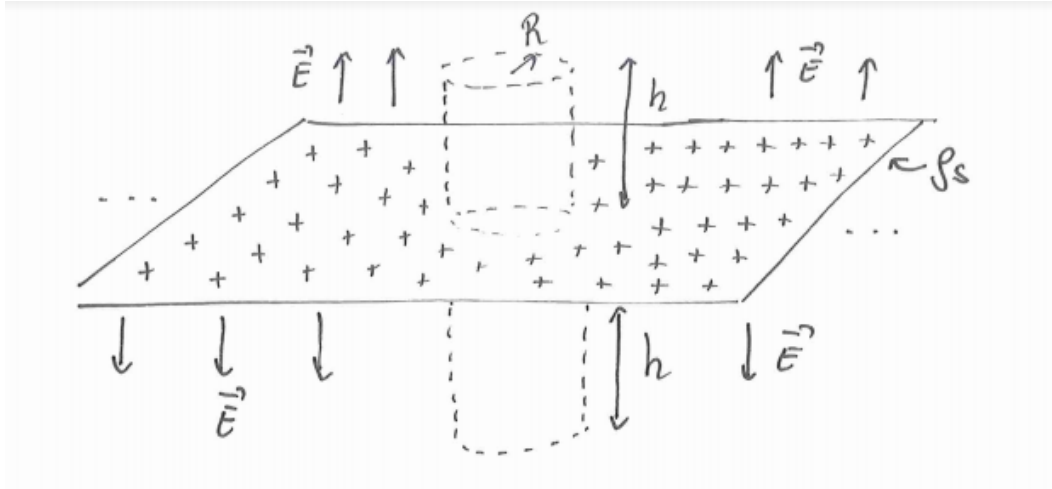


Figura 2.1: Plano infinito cargado positivamente y superficie cilíndrica de radio R y altura $2h$

Ahora, calculemos el flujo Φ del campo eléctrico a través de la superficie cilíndrica de la figura.

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{Lateral} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{Tapa\ superior} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{Tapa\ inferior} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (2.20)$$

Ahora bien, como se puede ver en el dibujo, el campo eléctrico es perpendicular a $d\vec{s}$ en la tapa lateral, y paralelo en las tapas superior e inferior. Así pues, podemos escribir el flujo como.

$$\Phi = \int_{Tapa\ superior} E ds + \int_{Tapa\ inferior} E ds \quad (2.21)$$

Por la simetría del problema, como ambas tapas están a la misma distancia h del plano, los campos en cada tapa son constantes e iguales entre si (en módulo). De esta manera, podemos sacarlos fuera de la integral.

$$\Phi = E(h) \left(\int_{Tapa\ superior} ds + \int_{Tapa\ inferior} ds \right) \quad (2.22)$$

Evaluando estas integrales.

$$\Phi = 2\pi R^2 E(h) \quad (2.23)$$

Por otro lado, la carga encerrada en el interior de la superficie será el producto de la superficie de plano que está en el interior del cilindro y de la densidad superficial de carga.

$$Q_{enc} = \rho_s \pi R^2 \quad (2.24)$$

Y ahora, utilizando la ley de Gauss, podemos relacionar el flujo con la carga encerrada.

$$2\pi R^2 E(h) = \frac{\rho_s \pi R^2}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

De donde obtenemos que el módulo del campo eléctrico en función de la distancia al plano, a la que ahora nos referiremos como z es.

$$E(z) = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \quad (2.26)$$

Que resulta no depender de la distancia al plano (esto se debe a que estamos considerando que este es infinito). El vector campo eléctrico será.

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & Si\ z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} & Si\ z < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

2.1.2. Funciones de potencial del campo electrostático

Los postulados de la electrostática nos especifican el valor de la divergencia y del rotacional del campo electrostático en el espacio libre. Según el teorema de Helmholtz, esto nos permite conocer de manera unívoca el campo eléctrico. Para ello, calcularemos las funciones 1.14 y 1.15.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\alpha(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla \cdot \vec{E} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (2.28)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\beta(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla \times \vec{E} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad (2.29)$$

Para distribuciones superficiales y lineales de carga las expresiones son análogas, cambiando solo el tipo de distribución de carga y las dimensiones del recinto de integración. A la función $\phi(\vec{r})$ se la conoce como potencial escalar eléctrico, y siguiendo la expresión 1.16 el campo electrostático se puede calcular de la siguiente manera.

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.30)$$

Si en la expresión anterior sustituimos el potencial dado por el teorema de Helmholtz

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \quad (2.31)$$

Ahora, si nuestras funciones son lo suficientemente bien comportadas, podemos introducir el gradiente en la integral

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \left(\frac{\rho_v(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (2.32)$$

Ahora, teniendo en cuenta que para el operador gradiente, las coordenadas primadas actúan como constantes, llegamos a la expresión integral para el campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dv' \quad (2.33)$$

Como apunte, en el caso de que estemos ante un conjunto de N cargas puntuales y no de una distribución continua de carga, el potencial escalar eléctrico se puede calcular como.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|} \quad (2.34)$$

Del que se deriva de forma sencilla la siguiente expresión, conocida como la ley de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k (\vec{r} - \vec{r}'_k)}{|\vec{r} - \vec{r}'_k|^3} \quad (2.35)$$

Un detalle importante que destacar acerca del potencial escalar es que no está completamente determinado, sino que infinitos potenciales distintos pueden dar lugar a un mismo campo eléctrico. Para comprobar esto consideremos el siguiente potencial.

$$\phi' = \phi + \xi \quad (2.36)$$

Donde ξ es una constante arbitraria. El campo generado por este nuevo potencial se puede calcular tomando el gradiente de ϕ'

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' = -\nabla\phi - \nabla\xi = -\nabla\phi = \vec{E} \quad (2.37)$$

Por lo tanto no tiene sentido hablar del valor del potencial eléctrico en un determinado punto. Lo que sí que tiene interés es la diferencia de potencial entre dos puntos. A continuación discutiremos brevemente su significado físico. Para ello consideraremos la circulación de \vec{E} a través de una curva \mathcal{C} que une dos puntos a y b. Por definición, esta circulación será

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} \quad (2.38)$$

Utilizando el teorema del gradiente, podemos escribir esta integral en términos de los valores del potencial en los puntos a y b

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{r} = \phi(a) - \phi(b) \quad (2.39)$$

Si multiplicamos ambos lados por una carga q y utilizamos la expresión 2.10 podemos relacionar esta circulación con el trabajo realizado por la fuerza electrostática, W.

$$\int_{\mathcal{C}} q\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = q(\phi(a) - \phi(b)) \quad (2.40)$$

O lo que es lo mismo.

$$\phi(b) - \phi(a) = -\frac{W}{q} \quad (2.41)$$

Es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos a y b es el trabajo por unidad de carga que hay que realizar en contra del campo eléctrico para mover una cierta carga de un punto a otro.

2.1.3. Ecuaciones de Poisson y de Laplace

Ahora introduciremos por primera vez dos ecuaciones en derivadas parciales de gran importancia, y que analizaremos en mayor detalle a lo largo del temario. Partiendo de los postulados de la electrostática en el espacio libre, podemos obtener las siguientes relaciones.

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \implies \vec{E} = -\nabla\phi \quad (2.42)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (2.43)$$

E introduciendo el operador laplaciano llegamos a la ecuación de Poisson.

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon_0} \quad (2.44)$$

Y para las regiones del espacio en las que no exista carga, se verificará la forma homogénea de la ecuación de Poisson, la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2\phi = 0 \quad (2.45)$$

2.2. Teorema de Earnshaw

2.2.1. Condiciones para un equilibrio estable

Sea una región del espacio libre donde existe un determinado potencial electrostático $\phi(\vec{r})$. Si tenemos en cuenta que $\vec{E} = -\nabla\phi$, el campo electrostático apuntará hacia los mínimos de potencial. De esta manera, para que una carga positiva se encuentre en equilibrio, es necesario que esta esté situada en un mínimo local de $\phi(\vec{r})$, mientras que para una carga negativa, se requiere un máximo local.

2.2.2. Formulación y demostración del teorema

Teorema: Sea una región del espacio libre donde existe un potencial electrostático que obedece la ecuación de Laplace. Para todos los extremos de este potencial, estos serán puntos de ensilladura.

Demostración: Los extremos de la función potencial cumplen todos ellos que el gradiente de la misma se anula ($\nabla\phi = 0$). Ahora bien, estos extremos en principio pueden ser máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Para analizar la naturaleza de estos extremos construimos la matriz Hessiana en cada uno de los puntos.

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Esta es una matriz simétrica de números reales, y por lo tanto es una matriz Hermítica ($\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger$). El teorema espectral nos garantiza entonces que la matriz es diagonalizable, y que además todos sus autovalores serán reales. Sean entonces $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los autovalores de esta matriz. Si los tres son positivos (negativos), entonces el punto en cuestión es un mínimo (máximo). En el caso de que tengan distintos signos, el punto será de ensilladura. Fijémonos ahora en la traza de la matriz Hessiana, que sabemos que coincide con la suma de los autovalores de la misma.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.47)$$

Como hemos asumido que en la región de interés, el potencial verifica la ecuación de Laplace, tendremos que.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (2.48)$$

Ahora bien, esta suma es incompatible con que todos los autovalores sean positivos o que todos sean negativos, por lo que es imposible encontrar un máximo o mínimo local, siendo todos los extremos puntos de ensilladura¹.

2.2.3. Regiones provistas de carga

Hemos visto lo que ocurre en las regiones donde se verifica la ecuación de Laplace, pero sería interesante ver lo que ocurre en las regiones que posean carga en su interior, donde sabemos que se verifica la ecuación de Poisson (2.44). En este caso, el razonamiento es exactamente el mismo que el anterior. Construyendo la matriz Hessiana y calculando su traza, obtenemos que.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{\rho_v(P)}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

Donde P es el punto donde estamos evaluando la matriz Hessiana. Ahora la suma de los autovalores no es necesariamente igual a cero, por lo que se presentan tres casos.

Caso 1. $\rho_v(P) > 0$: En este caso, está permitido que los tres autovalores sean negativos, lo que haría que P fuese un máximo. Por otro lado, sería imposible alcanzar un mínimo, ya que la suma de tres cantidades positivas no puede ser negativa. Por supuesto, aunque sea posible obtener un máximo, sigue siendo posible que P sea un punto de ensilladura.

Caso 2. $\rho_v(P) < 0$: Ahora, como la suma de autovalores es positiva, está permitido que todos ellos sean positivos, y por tanto que P sea un mínimo.

Caso 3. $\rho_v(P) = 0$: Si $\rho_v = 0$ en P, entonces en ese punto el potencial verifica la ecuación de Laplace, y por el teorema de Earnshaw, P tan solo puede ser un punto de ensilladura.

2.2.4. Significado físico

Como ya hemos visto, para tener una situación de equilibrio estable es necesario que el potencial en un punto tenga un máximo o un mínimo. Así pues, el teorema de Earnshaw nos dice que, en regiones en las que no exista carga, es imposible alcanzar un equilibrio estable utilizando tan solo fuerzas electrostáticas. Por otro lado, en regiones cargadas positivamente (negativamente), tan solo las cargas negativas (positivas) pueden estar en situación de equilibrio estable.

2.3. El dipolo eléctrico.

Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas puntuales con cargas opuestas q y -q. Tanto el campo como el potencial generado por estos objetos será de gran importancia más adelante, así que dedicaremos esta sección a calcularlo. Consideremos pues el siguiente modelo del dipolo eléctrico.

¹Estamos ignorando el caso degenerado, en el que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En este caso la argumentación que hemos realizado no sería suficiente, y habría que construir el tensor de terceras derivadas para analizar el comportamiento del potencial. Es posible demostrar que el teorema se sigue cumpliendo, pero excede el nivel de este curso

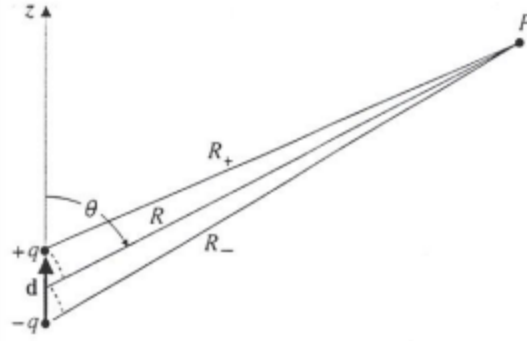


Figura 2.2: Dipolo eléctrico

Para calcular el potencial en un punto arbitrario P en función de R_+ y R_- , no hay más que utilizar la ecuación 2.34, llegando a la siguiente expresión.

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) \quad (2.50)$$

Si ahora consideramos que P está lo suficientemente alejado del dipolo como para considerar que $d \ll R$, podemos tomar las siguientes aproximaciones.

$$R_+ \approx R - \frac{d}{2} \cos \theta \quad (2.51)$$

$$R_- \approx R + \frac{d}{2} \cos \theta \quad (2.52)$$

Sustituyendo esto en la expresión 2.50, llegamos a que

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(R - \frac{d}{2} \cos \theta\right)} - \frac{1}{\left(R + \frac{d}{2} \cos \theta\right)} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{d \cos \theta}{R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta} \right) \quad (2.53)$$

Y si ahora tenemos en cuenta de nuevo que, al trabajar en puntos lejanos al dipolo, $d \ll R$, podemos ignorar el término $R^2 - \frac{d^2}{4} \cos^2 \theta$ frente a R^2 , y llegamos a la expresión del potencial creado por un dipolo en puntos alejados del mismo.

$$\phi \approx \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.54)$$

Y finalmente, si introducimos el vector momento dipolar eléctrico como $\vec{p} = q\vec{d}$, el potencial será.

$$\phi = \frac{\vec{p} \cdot \hat{R}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.55)$$

Y para calcular el campo eléctrico generado por el dipolo no hay más que aplicar el gradiente en coordenadas esféricas.

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial R}\hat{r} - \frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (2.56)$$

2.4. Expansión multipolar del potencial escalar eléctrico

Consideremos una distribución arbitraria de carga, y preguntémonos cuanto vale el potencial eléctrico en puntos muy alejados de esa distribución. Si la carga total de nuestra

distribución es q , una buena aproximación sería considerar el potencial creado por una carga puntual, ya que a estas distancias, la distribución se puede considerar como puntual. Tendríamos entonces que

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{2.57}$$

Pero que ocurre si la carga total de nuestra distribución es nula? Claramente el potencial no puede ser nulo, ya que como vimos en la sección anterior, un dipolo de carga total nula genera un potencial no nulo. Podríamos entonces considerar la distribución de carga como dos cargas puntuales q y $-q$, y considerar el potencial creado por este dipolo, lo que generaría un potencial como el de la ecuación 2.55, que es proporcional a $\frac{1}{r^2}$

Al hacer esta aproximación, estamos despreciando las interacciones entre agrupaciones de más de dos cargas. Tal y como hicimos para el dipolo, sería posible calcular el potencial creado por un cuadrupolo (que sería proporcional a $\frac{1}{r^3}$), de un octopolo...

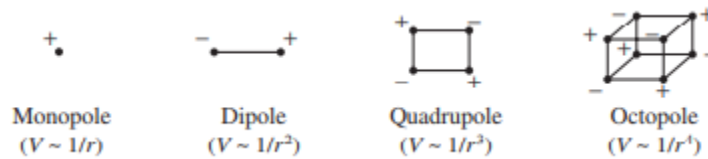


Figura 2.3: Esquemas de un monopolo, dipolo, cuadrupolo y octopolo

Nuestro objetivo es hallar una expresión para el potencial en puntos alejados de la distribución de carga tal que tenga en cuenta las interacciones entre n-polos de un orden que, en principio, puede ser tan grande como queramos. Para ello, consideremos la expresión del potencial escalar eléctrico

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \tag{2.58}$$

Para mayor comodidad, sea $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$, como se indica en la siguiente figura

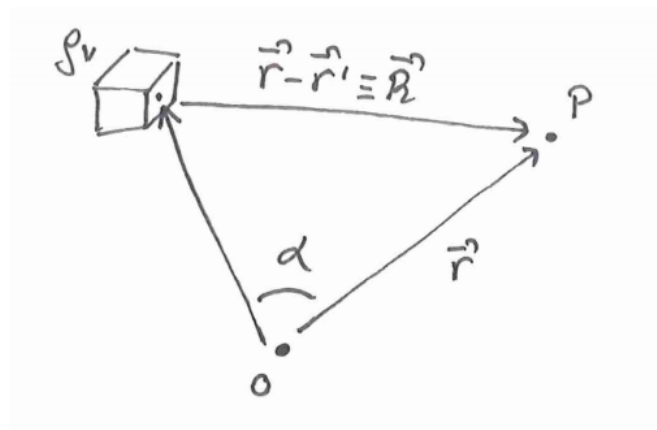


Figura 2.4: Representación de la situación, donde el punto P está lo suficientemente alejado de la distribución de carga

Ahora, se puede utilizar el teorema del coseno para relacionar distintas cantidades

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \alpha \tag{2.59}$$

O lo que es lo mismo

$$R^2 = r^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha \right) \quad (2.60)$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos miembros llegamos a que

$$R = r\sqrt{1+x} \quad (2.61)$$

Donde hemos definido x como

$$x \equiv \frac{r'}{r} \left(\frac{r'}{r} - 2 \cos \alpha \right) \quad (2.62)$$

Ahora consideremos la siguiente expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \quad (2.63)$$

Para puntos muy alejados de la distribución de carga, $x \ll 1$, así que podemos expandir esta función en serie de Taylor en torno a $x=0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots \right) \quad (2.64)$$

Si ahora se sustituye el valor de x y se reordenan términos, se llega a la siguiente expresión

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \left(\frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{2} \right) + \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \left(\frac{5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}{2} \right) + \dots \right] \quad (2.65)$$

Las funciones de α son algo conocido, los polinomios de Legendre², que se recogen en la siguiente tabla.

n	0	1	2	3
$P_n(\mu)$	1	μ	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$

Cuadro 2.1: Polinomios de Legendre

Podemos entonces expresar la inversa de R en función de los polinomios de Legendre

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) \quad (2.66)$$

E introduciendo esto en la expresión del potencial escalar eléctrico

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}') \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha) dv' \quad (2.67)$$

Y reorganizando términos

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\tau} (r')^n \rho_v(\vec{r}') P_n(\cos \alpha) dv' \quad (2.68)$$

A esta expresión se la conoce como la expansión multipolar del potencial escalar. Si desarrollamos el sumatorio podemos encontrar términos proporcionales a r^{-n} , con $n > 1$. Estos

²Estos polinomios se estudian en MMIV como las soluciones a la ecuación diferencial de Legendre

son los términos monopolar, dipolar, cuadripolar y superiores. Desarrollemos por ejemplo el término dipolar

$$\phi_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\tau} r' \cos \alpha \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (2.69)$$

Ahora, utilizando que $r' \cos \alpha = \hat{r} \cdot \vec{r}'$, podemos reescribir este término como

$$\phi_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \int_{\tau} \vec{r}' \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (2.70)$$

Comparando esta ecuación con la expresión 2.55, podemos identificar el vector momento dipolar con

$$\vec{p} = \int_{\tau} \vec{r}' \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (2.71)$$

De forma totalmente análoga es posible deducir expresiones para los momentos cuadripolares, octopolares...³

En general, la expansión multipolar del potencial escalar es muy útil para hallar expresiones aproximadas para el potencial, ya que basta con considerar la distribución de carga como una carga puntual e ir añadiendo términos correctores (dipolar, cuadripolar...), hasta que se alcance el grado de precisión requerido. Esto es posible debido a que, cuanto más compleja sea la interacción entre cargas, más se atenuará con la distancia.

2.5. La función delta de Dirac

Vamos a introducir esta función⁴ a partir de una aparente contradicción, viendo como nos sirve para solucionarla. De esta manera, consideremos el siguiente campo vectorial

$$\vec{v} = \frac{A\hat{r}}{r^2} \quad (2.72)$$

Donde A es una constante. Se puede ver claramente que tiene la forma del campo eléctrico generado por una carga puntual predicho por la ley de Coulomb (ecuación 2.35). Si ahora calculamos la divergencia de este campo

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{A}{r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A) = 0 \quad (2.73)$$

Consideremos ahora un volumen τ limitado por una superficie esférica S centrada en el origen y de radio R. Según el teorema de la divergencia

$$\int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{v}) dv = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (2.74)$$

Según el cálculo de la divergencia que acabamos de realizar, el primer miembro de la igualdad ha de ser nulo

$$\int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{v}) dv = 0 \quad (2.75)$$

Pero al evaluar el segundo miembro

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_S v(r=R) ds = \frac{A}{R^2} \oint_S ds = 4\pi A \neq 0 \quad (2.76)$$

Hemos llegado a una aparente contradicción, y es que hemos cometido un fallo, sutil pero importante, a la hora de calcular la divergencia. Para ver el problema, recordemos que la

³Destacar que el momento monopolar sería simplemente la carga total de la distribución.

⁴Realmente, la delta de Dirac no es una función en el sentido usual, sino que se trata de una función generalizada o distribución, y se discute formalmente en Métodos Matemáticos VI.

divergencia de un campo se relaciona con la existencia de fuentes y sumideros de dicho campo

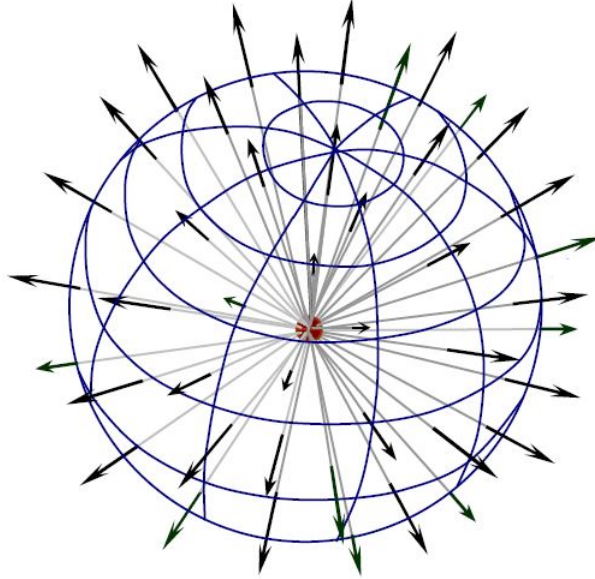


Figura 2.5: Representación del campo \vec{v} (con $A > 0$) y de la superficie S

Según el cálculo que hemos realizado antes, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, o lo que es lo mismo, el campo \vec{v} no tiene ni fuentes ni sumideros en todo el espacio, algo que es claramente falso, ya que como se puede ver en la figura 2.5, el campo \vec{v} tiene claramente una fuente en el origen, donde además dicho campo diverge. El problema viene de que no estamos teniendo en cuenta el origen en el cálculo de esta divergencia.

Para hacerlo es necesario utilizar la función delta de Dirac. En estos apuntes no la introduciremos formalmente, sino que daremos una idea intuitiva suficiente para su uso en electromagnetismo. Así pues, definimos la delta como

$$\delta(x - a) \equiv \begin{cases} 0 & \text{Si } x \neq a \\ \infty & \text{Si } x = a \end{cases} \quad (2.77)$$

Esta función tiene dos propiedades clave para el desarrollo que haremos a continuación. La primera es que está normalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (2.78)$$

La segunda de estas propiedades es muy intuitiva si pensamos que la delta se anula en todos los puntos excepto en $x=a$

$$f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a) \quad (2.79)$$

Combinando estas dos propiedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a) \quad (2.80)$$

Por supuesto, esto es en el caso unidimensional, mientras que nuestro problema es tridimensional. Por este motivo, definimos la delta tridimensional como

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - \vec{r}_0 \cdot \hat{x}) \delta(y - \vec{r}_0 \cdot \hat{y}) \delta(z - \vec{r}_0 \cdot \hat{z}) \quad (2.81)$$

Esta delta tridimensional también está normalizada

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) dx^3 = 1 \quad (2.82)$$

Ahora, volviendo al problema inicial, podemos proponer la siguiente expresión para la divergencia de \vec{v} , que no solo se anula en todos los puntos que no sean el origen, sino que es consistente con un campo infinito en dicho punto

$$\nabla \cdot \vec{v} = 4\pi A \delta^3(\vec{r}) \quad (2.83)$$

Que si se integra en el volumen τ nos da un resultado compatible con el teorema de la divergencia

$$\int_{\tau} 4\pi \delta^3(\vec{r}) dv = 4\pi A \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \delta(\vec{r}) = 4\pi A \quad (2.84)$$

Donde hemos tenido en cuenta que $\delta(\vec{r})$ es nula en el exterior de τ .

Ahora que la delta de Dirac está introducida, consideremos el campo eléctrico generado por una carga puntual situada en el origen, que viene dado por la ley de Coulomb (ecuación 2.35

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (2.85)$$

Si tomamos su divergencia

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{q\hat{r}}{r^2} \right) \quad (2.86)$$

El término entre paréntesis es el campo \vec{v} con $A=q$, por lo que su divergencia se podrá escribir en función de la delta de Dirac

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (4\pi q \delta^3(\vec{r})) = \frac{q \delta^3(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2.87)$$

Y si ahora recordamos el segundo postulado de la electrostática

$$\frac{q \delta^3(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \implies \rho_v = q \delta^3(\vec{r}) \quad (2.88)$$

Esto nos está indicando que es posible escribir una densidad volumétrica de carga asociada a una carga puntual a través de la delta de Dirac, que le da estructura matemática a la idea de que en un punto exista una densidad infinita.

Podemos pensar en generalizar la expresión anterior a un conjunto de N cargas puntuales. La expresión más lógica parece ser la siguiente

$$\rho_v(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.89)$$

Veamos si esta expresión es correcta. Partamos de la expresión 2.33 e introduzcamos esta nueva noción de densidad volumétrica de carga

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') dv' = \int_{\tau} \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2.90)$$

Para mayor claridad en el siguiente paso, vamos a introducir todos los términos en el sumatorio

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (2.91)$$

Recordemos ahora la propiedad de la delta de Dirac dada por la ecuación 2.79. Según dicha propiedad, el campo eléctrico será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} dv' \quad (2.92)$$

Utilizando la linealidad de la integral, podemos sacar el sumatorio, así como los términos que son constantes, fuera de la misma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \int_{\tau} \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i) dv' \quad (2.93)$$

Como todas las cargas están situadas dentro del volumen τ , la integral de la delta tridimensional es la unidad, y por lo tanto el campo eléctrico será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (2.94)$$

Que es la ley de Coulomb. De esta manera, hemos demostrado que, en efecto, la densidad volumétrica asociada a un conjunto de cargas puntuales se puede escribir en función de la delta tridimensional según la ecuación 2.89.

Para finalizar, cabe destacar que así como hemos asignado una densidad volúmica de carga a un conjunto de cargas puntuales, es posible hacer lo mismo para distribuciones de carga lineales y superficiales, como se puede ver en las siguientes imágenes.

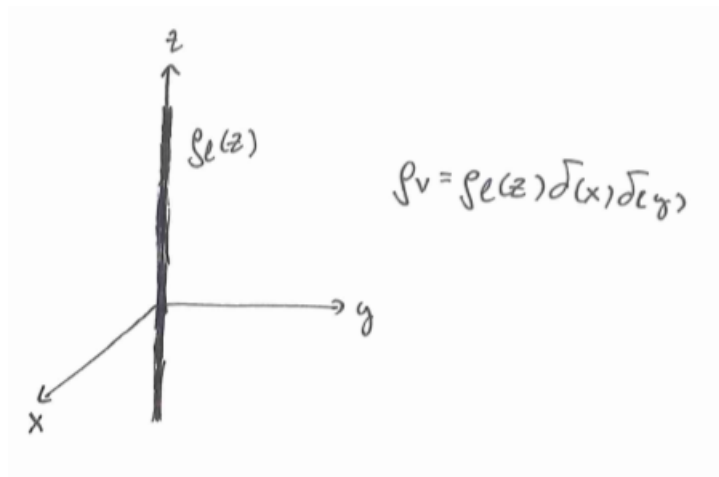


Figura 2.6: Densidad lineal de carga situada sobre el eje Z, y su densidad volumétrica asociada en términos de la función delta de Dirac.

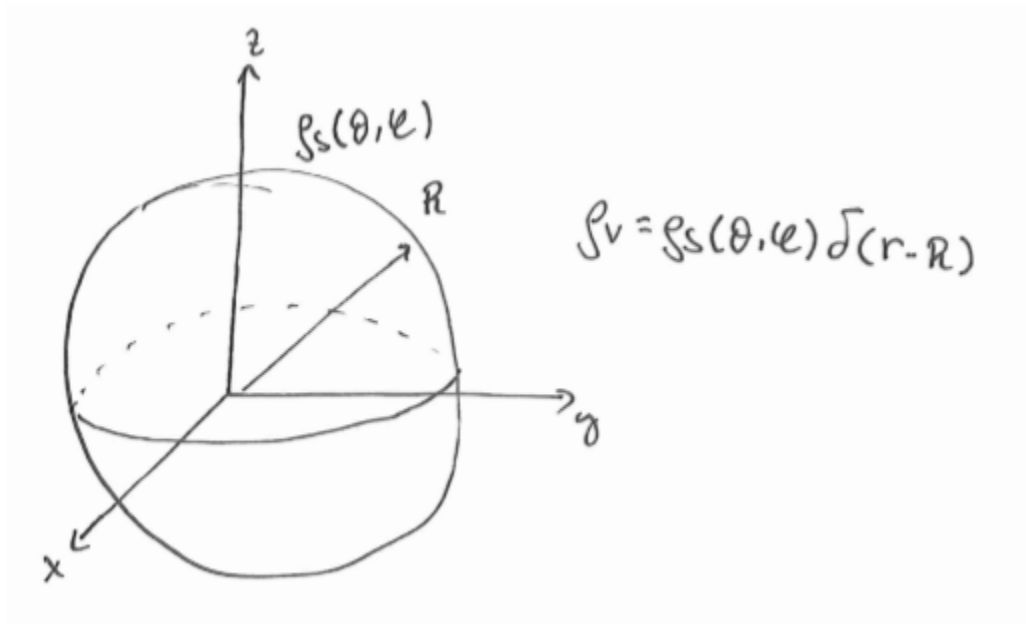


Figura 2.7: Corteza esférica de radio R donde se encuentra una densidad superficial de carga. La función $\delta(r - R)$ es nula en todo el espacio excepto en los puntos que, en coordenadas esféricas, cumplen que $r=R$, donde su valor tiende a infinito.

En resumen, dada una carga puntual o una distribución no volúmica de carga, se le puede asociar una distribución volúmica de carga, $\rho_v(\vec{r})$, sin más que multiplicar la distribución inicial de carga por una delta de Dirac apropiada, que sea nula en todos los puntos en los que no exista carga.

Capítulo 3

Electrostática en medios materiales

Hasta ahora hemos estudiado el campo electrostático en el espacio libre (el vacío), pero en la realidad existen una gran cantidad de medios en los que puede existir un campo electrostático y que no son el vacío, los llamados medios materiales. A lo largo de este tema nos centraremos principalmente en los conductores y en los dieléctricos, estudiando el comportamiento del campo \vec{E} en el interior y en la superficie de los mismos, y viendo como su presencia modifica los postulados de la electrostática en el espacio libre.

3.1. Conductores en equilibrio electrostático

Definimos un conductor como una región del espacio que posee carga libre (que se puede mover sin restricciones ante la presencia de un campo eléctrico). Durante toda esta sección asumiremos que las cargas se encuentran en sus posiciones en el equilibrio. Analicemos entonces las propiedades de estas regiones.

Para empezar, en el interior de un conductor en equilibrio electrostático, el campo eléctrico ha de anularse, ya que de lo contrario las cargas ya no estarían libres, sino que estarían sujetas a la acción de un campo. Como además sabemos que $\vec{E} = -\nabla\phi$, si $\vec{E} = 0$, entonces $\phi = cte$, y por lo tanto los conductores en equilibrio electrostático son volúmenes equipotenciales. El hecho de que el campo eléctrico se anule en el interior de los conductores nos permite saber como se distribuye la carga en estas regiones. Supongamos pues un conductor genérico como el que se representa en la figura.

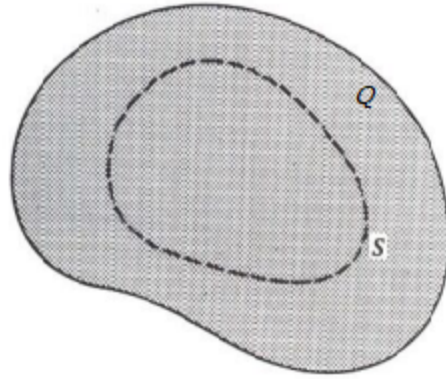


Figura 3.1: Conductor en equilibrio electrostático cargado con una carga total Q

Hemos llegado a la conclusión de que el campo en el interior del conductor es nulo, por lo que el flujo del campo electrostático a través de la superficie S será cero también, y por lo tanto la carga encerrada en su interior. Utilizando la ley de Gauss, como esto es válido para cualquier superficie cerrada contenida completamente en el conductor, la carga almacenada en el interior del mismo será cero, y toda ella estará distribuida en la superficie del conductor. Centrémonos ahora en esta superficie. El campo eléctrico en esta zona tendrá dos componentes, una normal a la superficie del conductor, y una tangencial.

$$\vec{E} = E_n \hat{n} + E_t \hat{t} \quad (3.1)$$

Ahora bien, como las cargas en el conductor han de estar en equilibrio, la componente tangencial ha de anularse, ya que de no hacerlo las cargas se moverían por la superficie del conductor. Así pues, el campo electrostático será siempre normal a la superficie de un conductor. Podemos utilizar la ley de Gauss para hallar el valor de este campo normal si consideramos la siguiente situación.

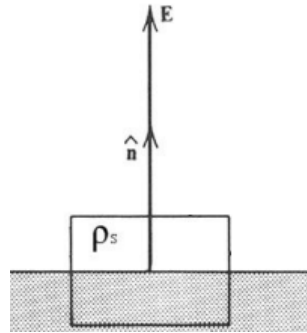


Figura 3.2: Superficie de un conductor en equilibrio electrostático

Esta es una representación de cualquier punto de un conductor arbitrario, lo suficientemente cercano a la superficie como para poder aproximar esta localmente como un plano. Así pues, tenemos que el campo eléctrico es normal a la superficie del conductor, y que este solo existe en el exterior. Si calculamos el flujo, Φ .

$$\Phi = \int_{Superior} \vec{E}_n \cdot \hat{n} ds + \int_{Inferior} \vec{E}_{int} \cdot \hat{n} ds + \int_{Lateral} \vec{E}_t \cdot \hat{n} ds \quad (3.2)$$

Pero como ya hemos visto, tanto el campo interno como el tangencial han de ser nulos.

$$\Phi = \int_{Superior} \vec{E}_n \cdot \hat{n} ds \quad (3.3)$$

Si ahora ΔS es el área de la tapa superior, y sabiendo que al ser esta muy pequeña, podemos considerar que el campo \vec{E} es constante en todos los puntos de esta tapa, el flujo será.

$$\Phi = \vec{E}_n \Delta S \quad (3.4)$$

Si ahora recurrimos a la ley de Gauss, sabemos que este flujo será igual a.

$$\Phi = \vec{E}_n \Delta S = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (3.5)$$

Reorganizando términos, y utilizando que $\frac{Q_{enc}}{\Delta S} = \rho_s$, llegamos a la expresión del campo en los puntos de la superficie de un conductor en equilibrio electrostático.

$$\vec{E}_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (3.6)$$

3.1.1. Blindaje utilizando conductores

A continuación veremos como es posible aislar ciertas regiones del espacio de los efectos del campo eléctrico utilizando conductores en equilibrio electrostático. En primer lugar, consideremos la siguiente situación.

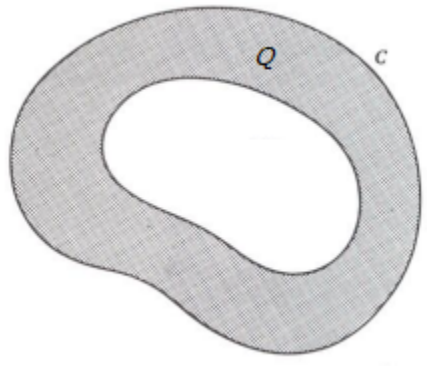


Figura 3.3: Conductor hueco cargado con una carga Q

En la cavidad interior de este conductor, el campo ha de ser forzosamente cero. Esto es sencillo de deducir utilizando la ley de Gauss, ya que para toda superficie cerrada que esté totalmente contenida en la cavidad, la carga encerrada en su interior (y por lo tanto el flujo del campo eléctrico a través de esta superficie) es nula. Como esto ha de ser cierto para cualquier superficie cerrada, el campo en el interior tiene que ser cero, independientemente de las posibles cargas situadas en el exterior del conductor. Además de este caso simple, podemos tener situaciones más complejas.

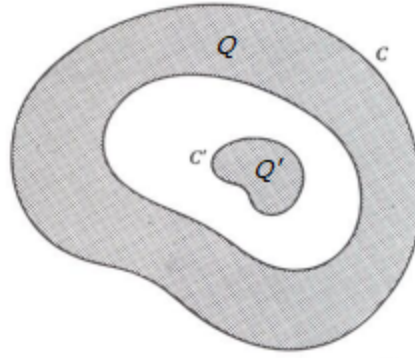


Figura 3.4: Conductor horadado con otro conductor en su interior.

En primer lugar, sabemos que en el interior de los conductores C y C' (las zonas sombreadas) no puede existir campo eléctrico por tratarse de conductores en equilibrio electrostático. Por otro lado, en la región entre conductores existirá campo eléctrico si y solo si $Q' \neq 0$. Si se da este caso, existirán superficies cerradas contenidas en la región entre conductores que contengan carga en su interior, por lo que la ley de Gauss impone que existirá un flujo no nulo del campo eléctrico a través de dichas superficies, forzando así la existencia de campo eléctrico en esta región. En la zona exterior, utilizando argumentos idénticos, existirá campo eléctrico si y solo si $Q + Q' \neq 0$.

3.1.2. La jaula de Faraday

Este es un caso específico de blindaje utilizando conductores, y es completamente análogo a la situación en la figura 3.3. Buscamos aislar una cierta región del espacio de los efectos de un campo eléctrico externo, así que la rodeamos de un conductor en equilibrio electrostático, que garantiza que todo campo en el interior de la jaula de Faraday se deberá a cargas situadas en el interior de la misma. Tendremos entonces la siguiente situación.

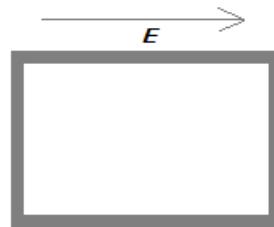


Figura 3.5: Esquema de la jaula de Faraday y del campo eléctrico externo

Ya sabemos que el campo en el interior será nulo, pero aprovecharemos para discutir el efecto del campo eléctrico sobre la distribución de carga en la superficie de la jaula. En ausencia de cargas en el interior de la jaula, esta carga se situará en la superficie más externa, y si hacemos la suposición de que la jaula es un cuerpo neutro, cuando no exista campo externo la densidad superficial de carga será cero en todos los puntos del conductor. Sin embargo, cuando se encienda el campo externo, las cargas en la jaula se reagruparán de tal manera que creen un campo tal que, al superponerse al campo externo en el interior de la jaula, provoquen que no exista campo en esta región.

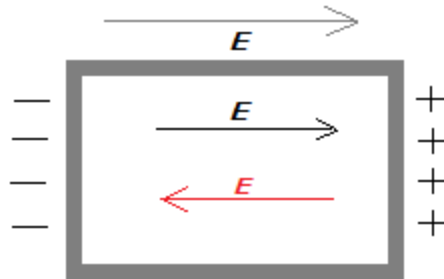


Figura 3.6: Redistribución de cargas y superposición de campos en el interior. En rojo se representa el campo generado por la distribución de cargas del conductor, y en negro el campo externo. Estos dos campos se cancelan en el interior de la jaula

3.1.3. El efecto punta

Consideremos la situación que se muestra en la siguiente figura

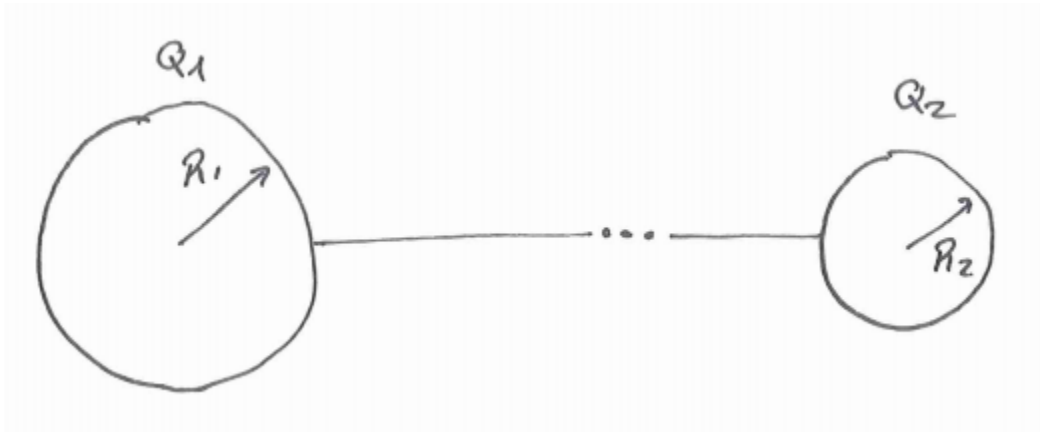


Figura 3.7: Dos esferas conductoras conectadas entre sí por un hilo

Si asumimos que el hilo que conecta las dos esferas es lo suficientemente largo, podemos afirmar que el campo generado por una de ellas no afectará al de la otra de manera significativa. En esta situación, una vez se alcance el equilibrio electrostático, cada esfera tendrá una carga Q_i homogéneamente distribuida a lo largo de su superficie (de nuevo, suponiendo que las dos esferas están lo suficientemente alejadas). El potencial en la superficie de cada esfera es sencillo de calcular

$$V_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1 \epsilon_0} \quad (3.7)$$

$$V_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2 \epsilon_0} \quad (3.8)$$

Ahora bien, las dos esferas forman un único conductor (ya que están conectadas por el hilo), así que deben estar al mismo potencial, de lo que se deduce

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad (3.9)$$

Si ahora pensamos en la densidad de carga de cada esfera, esta será

$$\rho_{s1} = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad (3.10)$$

$$\rho_{s2} = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} \quad (3.11)$$

El cociente entre estas dos densidades superficiales será

$$\frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{Q_1 R_2}{Q_2 R_1} \frac{R_2}{R_1} \quad (3.12)$$

Utilizando la relación 3.9, podemos escribir este cociente como

$$\frac{\rho_{s1}}{\rho_{s2}} = \frac{R_2}{R_1} < 0 \quad (3.13)$$

Y por lo tanto, llegamos a que

$$\rho_{s2} > \rho_{s1} \quad (3.14)$$

Vemos entonces que se acumula una mayor densidad superficial de carga de carga en la región con más curvatura (menor radio). Esto es lo que se conoce como efecto punta, que es más complicado de demostrar para geometrías arbitrarias¹. En general, para un conductor cualquiera, en el que existe una densidad superficial de carga ρ_s , esta será mayor en aquellas zonas con mayor curvatura.

Este es el principio del pararrayos, que consiste en un conductor con una punta muy estrecha, donde la densidad superficial de carga será mucho mayor, maximizando así la probabilidad de que un rayo caiga en dicha punta.

3.2. Medios dieléctricos

A diferencia de los conductores, los medios dieléctricos no poseen carga libre, sino que sus electrones están ligados a sus posiciones en cierta medida. De este modo, cuando a un dieléctrico se le aplica un campo externo, el movimiento que se les permite a las cargas es muy pequeño, y en vez de encontrarnos frente a una redistribución de la densidad de carga, como en el caso de los conductores, lo que ocurre es que el dieléctrico se polariza, ya que cada una de las moléculas que lo compone adquiere un momento dipolar, al redistribuirse ligeramente su densidad electrónica. Como ya hemos visto en el tema anterior, un dipolo eléctrico genera su propio campo, y este también es el caso para las moléculas de los dieléctricos, que aunque individualmente generan campos muy débiles, en conjunto se pueden sumar para dar lugar a un efecto macroscópico. Definimos entonces el vector polarización como.

$$\vec{P} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{n\Delta v} \vec{p}_k}{\Delta v} \quad (3.15)$$

Donde los \vec{p}_k son los momentos dipolares de cada una de las moléculas contenidas en un volumen Δv , y n es el número de moléculas por unidad de volumen en el dieléctrico. Cuando el dieléctrico no está sometido a ningún campo externo, los dipolos de sus moléculas están distribuidos al azar, por lo que la suma vectorial de todos ellos será prácticamente nula, y no producirá efectos macroscópicos. No obstante, al someter al material a un campo electrostático externo, los dipolos de sus moléculas tenderán a alinearse, dando lugar a un vector polarización no nulo.

3.2.1. Densidades de carga de polarización

Vamos a calcular el campo creado por los dipolos inducidos en el dieléctrico. Para ello, consideraremos la forma diferenciada de la ecuación 2.55, considerando también que nuestro dipolo puede no estar situado en el origen, sino en un punto con un vector de posición \vec{r}' .

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.16)$$

¹Ver [2], sección 3.4

Para calcular el potencial en el punto con vector de posición , no hay más que integrar esta expresión en todo el volumen τ ocupado por el dieléctrico.

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\tau} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \int_{\tau} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.17)$$

Donde se ha utilizado que, a partir de la ecuación 3.15.

$$d\vec{p}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}') dV' \quad (3.18)$$

Ahora, teniendo en cuenta la siguiente identidad vectorial.

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (3.19)$$

Podemos reescribir el potencial como.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \quad (3.20)$$

Ahora, utilizando esta otra identidad vectorial.

$$\vec{A} \cdot \nabla' f = \nabla' \cdot (f\vec{A}) - f\nabla' \cdot \vec{A} \quad (3.21)$$

Tendremos que el potencial se puede expresar como la suma de dos integrales.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.22)$$

Si ahora S es la superficie que delimita la región dieléctrica, podemos utilizar el teorema de la divergencia en la primera integral para llegar a.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.23)$$

Recordemos que estamos calculando el campo generado por los dipolos situados en el interior del dieléctrico, y hemos sido capaces de expresar este campo como la suma de dos integrales. Comparándolas con la ecuación 2.28, vemos que son exactamente iguales, donde las densidades de carga superficial y volumétrica son.

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (3.24)$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (3.25)$$

A estas densidades de carga se las conoce como densidades de carga de polarización o densidades de carga ligada, y surgen debido a la inducción de dipolos en el material dieléctrico. A la hora de calcular los campos, hay que tenerlas en cuenta a mayores de las densidades de carga libres que puedan existir. Finalmente, es importante destacar que, según el principio de conservación de la carga, si el dieléctrico es inicialmente neutro (antes de aplicar el campo externo), entonces la carga total de polarización debe de ser nula.

$$\oint_S \rho_{ps} dS + \int_{\tau} \rho_{pv} dV = 0 \quad (3.26)$$

3.2.2. El vector desplazamiento eléctrico

Como ya hemos visto, en un sistema en el que se encuentre un dieléctrico, "aparecen" ciertas cargas a mayores de las cargas libres, a las que llamamos cargas ligadas o de polarización, y que tienen que ser tenidas en cuenta en cuanto al cálculo de los campos. Así pues, el primer postulado de la electrostática se convierte en.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v + \rho_{pv}}{\epsilon_0} \quad (3.27)$$

Cualitativamente, esto quiere decir que el campo \vec{E} nace y muere tanto en las distribuciones de carga libre como en las distribuciones de carga ligada. No obstante, nos gustaría contar con un campo que no dependa de las distribuciones de carga de polarización, y para obtenerlo, podemos manipular la expresión anterior para llegar a.

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \rho_{pv} = \rho_v \quad (3.28)$$

Y utilizando la ecuación 3.24.

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_v \quad (3.29)$$

Definimos entonces el vector desplazamiento eléctrico, \vec{D} , como.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.30)$$

Cuya divergencia depende únicamente de las cargas libres. Esto sin embargo tiene un precio, y es que el rotacional de \vec{D} ya no es nulo. En efecto, aplicando el rotacional a ambos miembros de la ecuación anterior, y aplicando el segundo postulado de la electrostática.

$$\nabla \times \vec{D} = \epsilon_0 \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \vec{P} = \nabla \times \vec{P} \neq 0 \quad (3.31)$$

3.2.3. El tensor susceptibilidad eléctrica

Existen ciertos materiales, llamados materiales lineales, en los que el vector polarización y el campo eléctrico están relacionados de la siguiente manera.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.32)$$

Donde χ_e es el tensor susceptibilidad dieléctrica del material en cuestión, que se puede representar como una matriz 3×3 cuyas componentes (que son adimensionales) dependen de la posición. En forma matricial, la ecuación 3.32 toma la siguiente forma.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{e11}(\vec{r}) & \chi_{e12}(\vec{r}) & \chi_{e13}(\vec{r}) \\ \chi_{e21}(\vec{r}) & \chi_{e22}(\vec{r}) & \chi_{e23}(\vec{r}) \\ \chi_{e31}(\vec{r}) & \chi_{e32}(\vec{r}) & \chi_{e33}(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Existen medios que además de ser lineales, son también isotrópicos. En estos medios, el tensor susceptibilidad eléctrica se vuelve diagonal y con tres autovalores idénticos, por lo que la expresión 3.32 tomaría la forma.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.34)$$

Donde ahora χ_e no es un tensor, sino una función escalar que depende de la posición. Finalmente, en los medios que además de lineales e isotrópicos son homogéneos, esta función de la posición se convierte en una constante.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3.35)$$

Si nos ponemos en el caso de medios lineales, homogéneos e isotrópicos (l.h.i), la expresión 3.30 se convierte en.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (3.36)$$

Donde $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ es una cantidad adimensional conocida como la permitividad relativa del medio, y $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ es la permitividad absoluta (o permitividad) del medio en cuestión, y se mide en F/m .

3.3. Condiciones de contorno en la separación entre medios

Dedicaremos esta sección al estudio del comportamiento de las distintas componentes de los campos \vec{E} y \vec{D} al pasar de un medio a otro.

3.3.1. Continuidad de las componentes tangenciales de \vec{E}

Consideremos la superficie de separación entre dos medios y el contorno $abcd$ indicado en la figura.

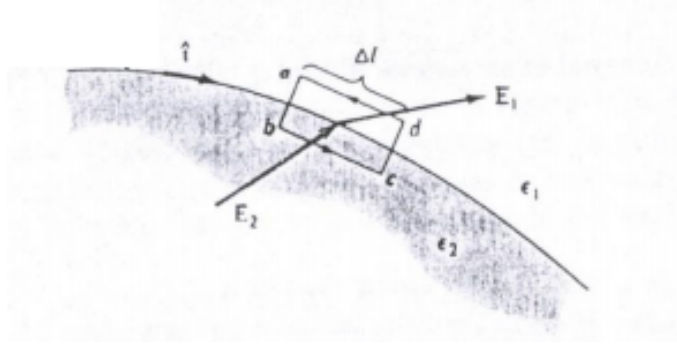


Figura 3.8: Superficie de separación entre dos medios con distintas permitividades absolutas, ϵ_1 y ϵ_2

Según el segundo postulado de la electrostática, $\nabla \times \vec{E} = 0$, y utilizando el teorema del gradiente.

$$\oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.37)$$

Ahora, consideremos que tomamos el límite en el que los tramos \bar{ab} y \bar{cd} tienden a cero, mientras que los otros dos permanecen iguales. En este caso tendríamos que.

$$\lim_{\bar{ab}, \bar{cd} \rightarrow 0} \oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.38)$$

Si ahora Δl es la distancia entre a y d (que coincide con la distancia entre b y c), y puesto que los diferenciales en cada integral tienen sentidos opuestos.

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \Delta l \cdot \hat{t} = 0 \quad (3.39)$$

Donde \hat{t} es un vector unitario tangente a la superficie de separación entre los dos medios. Manipulando la expresión anterior es posible deducir una relación entre las componentes tangenciales de \vec{E} en los dos medios.

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (3.40)$$

Es decir, las componentes tangenciales de \vec{E} se conservan al cambiar de un medio a otro.

3.3.2. Discontinuidad en las componentes normales de \vec{D}

Consideremos de nuevo una frontera entre dos medios de distintas permitividades absolutas, en la que existe una distribución superficial de carga libre, y consideremos también la superficie indicada en la figura.

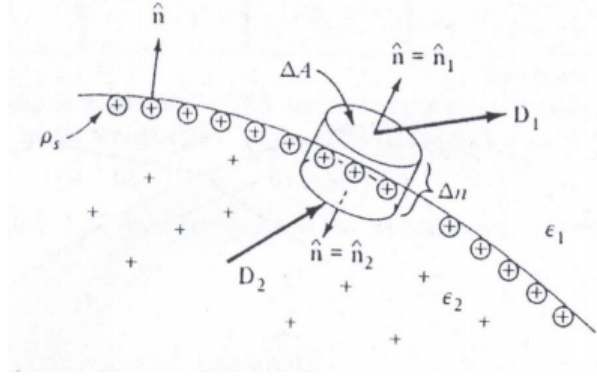


Figura 3.9: Separación entre dos medios de distintas permitividades absolutas

Hemos demostrado anteriormente que la divergencia de \vec{D} es la densidad de carga libre. Así pues, si calculamos el flujo de este campo a través de la superficie de la figura, a la que podemos llamar S .

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{D} dV = \int_{\tau} \rho_v dV \quad (3.41)$$

Consideremos ahora que la altura del cilindro, Δn tiende a cero. Aplicando este límite tendríamos que.

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int_{\tau} \rho_v dV = \int_{\Gamma} \rho_s dS \quad (3.42)$$

Donde ahora Γ es la superficie de separación entre los medios que está en el interior del cilindro. Si ahora tenemos en cuenta que $\hat{n}_1 = -\hat{n}_2$, podemos expresar el primer límite como.

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Gamma} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_1 dS \quad (3.43)$$

Juntando ambas ecuaciones, obtenemos que.

$$\int_{\Gamma} (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_1 dS = \int_{\Gamma} \rho_s dS \quad (3.44)$$

Y como los recintos de integración son iguales, los integrandos han de serlo también.

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n}_1 = \rho_s \quad (3.45)$$

Y desarrollando el producto escalar llegamos a la expresión de la discontinuidad de las componentes normales de \vec{D} .

$$D_{n1} - D_{n2} = \rho_s \quad (3.46)$$

3.4. Ecuaciones de Poisson y Laplace en medios dieléctricos

En el tema anterior dedicamos una sección a introducir las ecuaciones de Poisson y de Laplace para el campo electrostático en el espacio libre. Veamos como se modifican estas ecuaciones en medios dieléctricos. En primer lugar, sabemos que sigue aplicando el segundo postulado de la electrostática en el espacio libre ($\nabla \times \vec{E} = 0$), por lo que \vec{E} sigue siendo un campo conservativo, y por lo tanto deriva de un potencial escalar a través de un gradiente.

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (3.47)$$

Si consideramos medios lineales e isotropos, contamos con la siguiente igualdad, que ya hemos deducido anteriormente.

$$\vec{D} = \epsilon(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.48)$$

Nótese que la permeabilidad absoluta es una función de la posición y no una constante, ya que no hemos especificado que estemos trabajando con medios homogéneos. Si combinamos ambas ecuaciones, llegamos a que.

$$\vec{D} = -\epsilon(\vec{r}) \nabla \phi \quad (3.49)$$

Tomando la divergencia a ambos lados, y aplicando que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$, tenemos que.

$$\nabla \cdot (\epsilon(\vec{r}) \nabla \phi) = -\rho_v \quad (3.50)$$

Si desarrollamos el primer medio de la igualdad, llegamos a la ecuación diferencial que verifica el potencial eléctrico en medios lineales e isotropos.

$$\nabla \epsilon(\vec{r}) \cdot \nabla \phi + \epsilon(\vec{r}) \nabla^2 \phi = -\rho_v \quad (3.51)$$

Si ahora admitimos que el medio es homogéneo, la permitividad deja de depender de la posición y se convierte en una constante, y de esta manera obtenemos la ecuación de Poisson.

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (3.52)$$

Que para regiones en las que no exista carga libre, se reduce a la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.53)$$

Llegamos entonces a la conclusión de que el potencial escalar eléctrico en medios dieléctricos obedece las ecuaciones de Laplace o de Poisson si y solo si el medio es lineal, homogéneo e isotrópico. En caso de medios inhomogéneos, la ecuación diferencial es la dada por 3.51.

3.5. El electreto

Un electreto es un cilindro homogéneo hecho de material dieléctrico en el que existe una polarización uniforme.

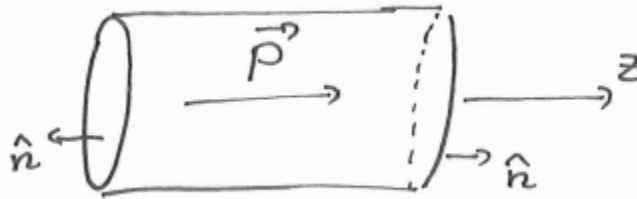


Figura 3.10: Electreto en el que existe una polarización uniforme $\vec{P} = P\hat{z}$. No existen distribuciones de carga libre

Vamos a calcular las fuentes de los campos \vec{E} y \vec{D} . En primer lugar, al no haber carga libre, tendremos que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{pv}}{\epsilon_0} \quad (3.54)$$

Las densidades de carga de polarización serán

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} = 0 \quad (3.55)$$

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \pm P \quad (3.56)$$

Tendremos entonces una densidad de carga superficial de polarización negativa en la tapa izquierda y una positiva en la derecha. Como $\nabla \times \vec{E} = 0$, estas densidades superficiales son las únicas fuentes de \vec{E} , que tendrá, de manera cualitativa, la siguiente forma

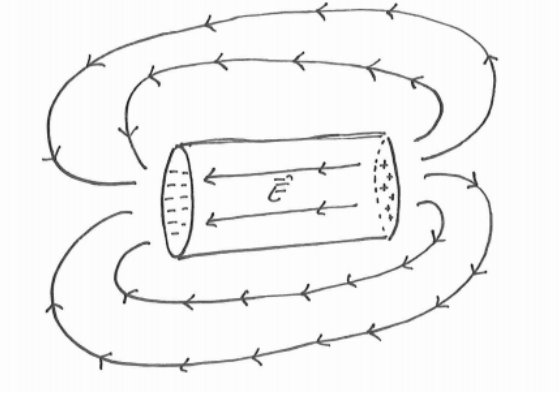


Figura 3.11: Líneas del campo eléctrico. Estas líneas "nacen" en las cargas positivas y "mueren" en las negativas.

Veamos ahora lo que le ocurre al campo \vec{D} . Para ello, recordemos la definición de este campo, dada por 3.30

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.57)$$

En el exterior del electreto, donde $\vec{P} = 0$, las líneas de \vec{E} y \vec{D} coinciden, ya que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \implies \vec{D} \parallel \vec{E} \quad (3.58)$$

Ahora bien, sabemos que, al no haber distribuciones de carga libre, $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, lo que nos indica que las líneas de \vec{D} tienen que ser cerradas. Así, las líneas de campo del vector desplazamiento eléctrico serán

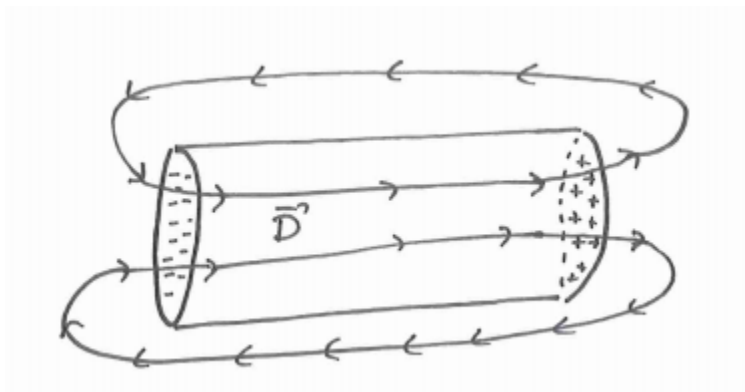
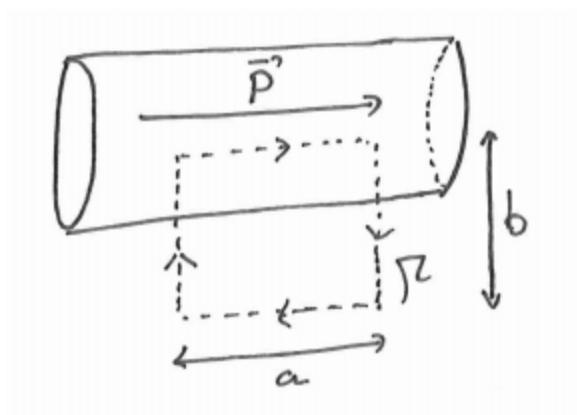


Figura 3.12: Líneas del campo \vec{D}

Visto este resultado, es razonable preguntarse por que existe campo \vec{D} si sus fuentes se anulan $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Si bien esto es cierto, nos estamos olvidando de sus fuentes vectoriales, ya que $\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P}$. Sea ahora el camino Γ detallado en la siguiente figura.

Figura 3.13: Camino cerrado Γ

Consideremos ahora la siguiente integral

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad (3.59)$$

Como el vector de polarización se anula fuera del electreto, y es perpendicular a $d\vec{r}$ en los tramos verticales, esta integral se reduce a

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_0^a \vec{P} \cdot d\vec{r} = P \int_0^a dr = aP \neq 0 \quad (3.60)$$

Tenemos entonces que la integral de \vec{P} en un camino cerrado es no nula, y por lo tanto \vec{P} no puede ser un campo conservativo. De esta manera, sabemos que $\nabla \times \vec{P} \neq 0$, por lo que existen fuentes vectoriales de \vec{D} .

Capítulo 4

Energía y fuerzas electrostáticas.

Hasta ahora, hemos desarrollado la electrostática a través de los dos postulados en el espacio libre y en medios dieléctricos, llegando a calcular el potencial y el campo eléctricos en varias situaciones. En este tema nos centraremos en las energías electrostáticas, relacionándolas con los distintos campos que ya hemos introducido, y finalmente relacionaremos estas energías con las fuerzas electrostáticas.

4.1. Energía de configuración de un sistema de cargas puntuales

Consideremos una carga puntual q_1 situada en un punto del espacio libre caracterizado por un vector de posición \vec{r}_1 . Imaginemos que ahora desplazamos una segunda carga q_2 desde el infinito hasta otro punto del espacio libre, caracterizado por otro vector de posición \vec{r}_2 . Definimos la energía de configuración de este sistema de dos cargas como el trabajo necesario para transportar la carga q_2 desde el infinito hasta su posición final¹. Si $V_1(\vec{r})$ es la función potencial generada por la carga q_1 , el teorema del gradiente nos garantiza que.

$$W_2 = q_2 \Delta V = q_2 (V_1(\vec{r}_2) - V_1(\infty)) \quad (4.1)$$

Recordemos que estamos considerando el trabajo realizado en contra del campo, de ahí la ausencia del signo menos en la ecuación 4.1. Además, como el potencial escalar es nulo en el infinito.

$$W_2 = q_2 V_1(\vec{r}_2) \quad (4.2)$$

Si ahora denotamos como r_{12} a la distancia entre \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , y sustituyendo la expresión del potencial creado por una carga puntual.

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \quad (4.3)$$

Si ahora quisiéramos traer otra carga, q_3 , desde el infinito hasta una posición marcada por el vector de posición \vec{r}_3 , tendríamos que hacer trabajo contra el campo creado por las cargas q_1 y q_2 . Si ahora $V_{12}(\vec{r})$ es el potencial creado por las cargas q_1 y q_2 , el trabajo necesario para trasladar q_3 será.

$$W_3 = q_3 V_{12}(\vec{r}_3) = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \quad (4.4)$$

¹Es importante darse cuenta de que no estamos imponiendo ninguna restricción acerca de la trayectoria de q_2 desde el infinito hasta \vec{r}_2 , ya que el hecho de que $\nabla \times \vec{E} = 0$ hace que el trabajo realizado no dependa del camino seguido.

Y para colocar una cuarta carga, q_4 , el proceso es análogo.

$$W_4 = \frac{q_4}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}} \right) \quad (4.5)$$

Para hallar la energía total de configuración del sistema de cuatro cargas no hay más que hacer la suma.

$$W = \sum_i W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right) \quad (4.6)$$

A partir de esta expresión, se puede generalizar para obtener la energía de configuración de un sistema de N cargas puntuales.

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.7)$$

Donde el índice $j = i + 1$ impide sumar el mismo par dos veces. Existe también la posibilidad de sumar pares repetidos y dividir entre dos, lo que nos deja con.

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (4.8)$$

Esta expresión resulta ser más útil, ya que se puede manipular para obtener.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \right) \quad (4.9)$$

El término entre paréntesis es exactamente el potencial electrostático generado por todas las cargas menos una en el punto donde se encuentra esa última carga. De esta manera, se puede escribir la energía electrostática de configuración de un sistema de cargas puntuales en función del potencial electrostático generado por todo ese conjunto de cargas.

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i) \quad (4.10)$$

Este es el trabajo necesario para situar las N cargas en sus respectivas posiciones, y concide con la cantidad de energía obtenida al romper totalmente la configuración.

4.1.1. Energía almacenada en distribuciones continuas

Es posible generalizar la expresión 4.10 a distribuciones continuas de carga, ya sean volumétricas, lineales o superficiales, sin más que sustituir las cargas puntuales por las respectivas densidades de carga, y reemplazando la suma por una integral que se extiende a las regiones del espacio donde existe carga.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} V(\vec{r}') \rho_v dv' \quad (4.11)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_S V(\vec{r}') \rho_s ds' \quad (4.12)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_L V(\vec{r}') \rho_l dl' \quad (4.13)$$

4.2. Energía electrostática en términos de cantidades de campo

Las expresiones que acabamos de deducir nos permiten calcular la energía electrostática almacenada en cualquier tipo de distribución de cargas, siempre que conozcamos como está distribuida (la función densidad). No obstante, a veces obtener esta función es complicado, y es más cómodo tener una expresión para la energía que solo dependa de los campos \vec{E} y \vec{D} . Para ello, y partiendo de la expresión 4.11.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} V(\vec{r}') \rho_v dv' = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \cdot \vec{D}) V(\vec{r}') dv' \quad (4.14)$$

Si ahora utilizamos la siguiente identidad vectorial.

$$\nabla \cdot (V\vec{D}) = \nabla V \cdot \vec{D} + V \nabla \cdot \vec{D} \quad (4.15)$$

Podemos sustituirla en la última integral para obtener.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla \cdot (V\vec{D}) dv' - \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla V \cdot \vec{D} dv' \quad (4.16)$$

Si ahora utilizamos el teorema de la divergencia en la primera integral, y en la segunda sustituimos $\vec{E} = -\nabla V$, llegamos a.

$$W = \frac{1}{2} \oint_S V\vec{D} \cdot d\vec{s}' + \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.17)$$

Fijémonos ahora en la integral de superficie. Como τ puede ser cualquier volumen, es posible escogerlo de forma que sea una esfera de radio R . Si se hace esto, sabemos que la función potencial decrece como $\frac{1}{R}$, y que el módulo del desplazamiento eléctrico decrece como $\frac{1}{R^2}$. Como el elemento de superficie ds aumenta con una razón de R^2 , el conjunto decrece como $\frac{1}{R}$, y por lo tanto.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_S V\vec{D} \cdot d\vec{s}' \asymp \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0 \quad (4.18)$$

Para el otro sumando, al hacer tender R a ∞ , tenemos que integrar sobre todo el espacio, y así.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{Todo el espacio}} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.19)$$

Que es equivalente a integrar en todas las regiones donde existan campos no nulos. Si denotamos a la unión de todas estas regiones como Ω , la energía electrostática será.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.20)$$

Hasta el momento, el planteamiento ha sido completamente general. Si ahora admitimos que estamos trabajando en medios lineales, homogéneos e isótropos, podemos hacer uso de la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ para describir la expresión anterior.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon E^2 dv' \quad (4.21)$$

Esto puede interpretarse como la integral de una cierta densidad de energía electrostática en un determinado volumen, así que podemos definir esta densidad como.

$$w_e \equiv \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (4.22)$$

De forma que la energía será.

$$W = \int_{\Omega} w_e dv' \quad (4.23)$$

4.2.1. Ejemplo: Energía almacenada en un condensador.

Consideremos un condensador de placas plano-paralelas como el que se muestra en la siguiente figura.

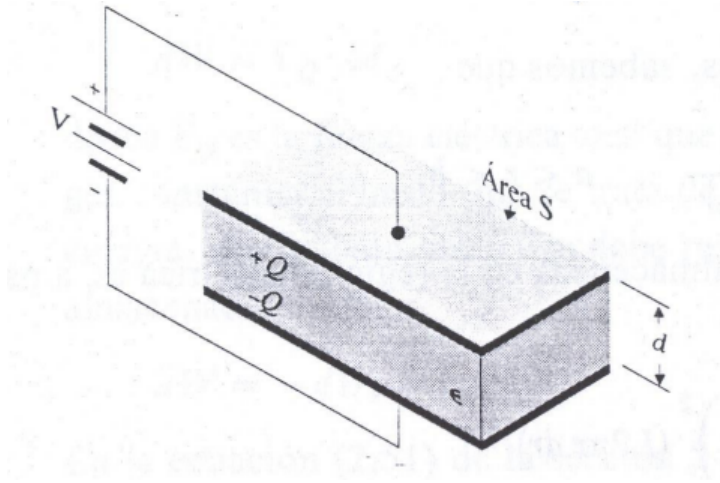


Figura 4.1: Condensador de placas plano-paralelas sometido a una diferencia de potencial V . En su interior hay un medio l.h.i de permitividad absoluta ϵ .

Para modelar el campo eléctrico en el interior de este condensador vamos a utilizar un resultado previo: el campo creado por un plano infinito, dado por 2.27. Si ignoramos efectos de borde, este será el campo generado por cada una de las placas del condensador. Si se tiene en cuenta que las placas tienen densidades de carga con signos opuestos, es sencillo ver que los campos de cada placa se superponen para dar lugar al siguiente campo total.

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{z} & \text{En el interior del condensador} \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases} \quad (4.24)$$

Donde hemos situado el eje z de tal manera que sea perpendicular a las placas del condensador. Además, como conocemos la distribución superficial de carga, el campo en el interior del condensador será.

$$\vec{E}_{int} = \frac{Q}{S\epsilon} \hat{z} \quad (4.25)$$

Hay una manera más simple de expresar este campo eléctrico. Si calculamos la diferencia de potencial entre placas, V .

$$V = \int_0^d \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} = \int_0^d \frac{Q}{S\epsilon} dr = \frac{Qd}{S\epsilon} = E_{int}d \quad (4.26)$$

Y por tanto, el campo eléctrico será.

$$\vec{E}_{int} = \frac{V}{d} \hat{z} \quad (4.27)$$

Y como en el interior tenemos un medio l.h.i, el vector desplazamiento eléctrico en todo el espacio será.

$$\vec{D} = \begin{cases} \epsilon \vec{E}_{int} & \text{En el interior del condensador} \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases} \quad (4.28)$$

Ahora que conocemos los campos, podemos usar la ecuación 4.20 para calcular la energía almacenada en este condensador. Sea pues τ el volumen encerrado entre las placas.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon E^2 dv' = \frac{1}{2} \int_{\tau} \epsilon \left(\frac{V}{d} \right)^2 dv' = \frac{1}{2} \frac{SV^2}{d} \epsilon \quad (4.29)$$

Podemos relacionar esta cantidad con la capacidad del condensador, definida como.

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (4.30)$$

Que, utilizando resultados previos de este apartado.

$$C = Q \cdot \left(\frac{Qd}{S\epsilon} \right)^{-1} = \frac{S\epsilon}{d} \quad (4.31)$$

Y por lo tanto la energía electrostática almacenada se puede expresar como.

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.32)$$

4.3. Energía de polarización

Cuando introducimos los medios dieléctricos, hablamos de que sus propiedades surgían de una perturbación en la estructura electrónica de sus moléculas al aplicar un campo externo. Evidentemente, dicho cambio requiere de una determinada cantidad de energía, a la que se le conoce como energía de polarización. Para ver esta variación de energía, consideremos un condensador de placas plano-paralelas de capacidad C_0 cuando entre sus placas se encuentra el vacío. Consideremos ahora que introducimos en su interior un material dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r . El dieléctrico se polarizará como se muestra en la figura.

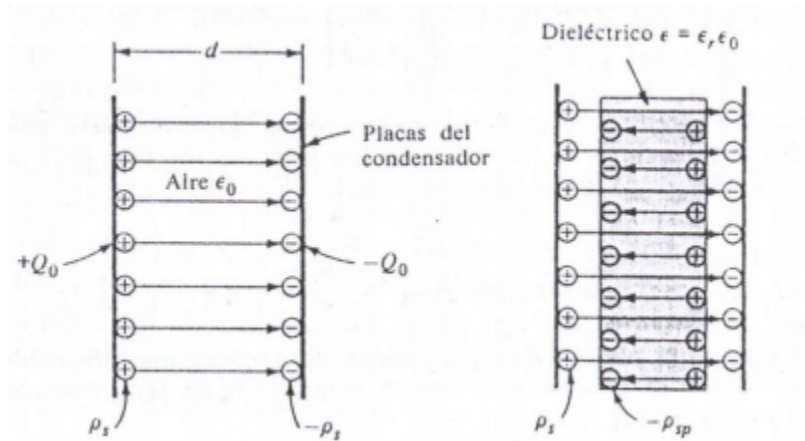


Figura 4.2: Esquema de lo que le ocurre a las cargas en el dieléctrico en el proceso de polarización. Como aclaración, toda la región entre placas está ocupada por el dieléctrico. La superficie de cada placa es S .

Empecemos calculando el valor de los campos \vec{D} y \vec{E} en todo el espacio. Como estamos ante un material dieléctrico, tendremos que las fuentes de \vec{E} serán tanto las cargas libres como las cargas ligadas, mientras que las fuentes del campo \vec{D} son solo las cargas libres, lo que indica que para el campo \vec{D} , no existe ningún material dieléctrico. Volviendo de nuevo

al plano infinito, es sencillo demostrar que el vector desplazamiento eléctrico generado por esa distribución de corriente será.

$$\vec{D} = \begin{cases} \frac{\rho_s}{2} \hat{z} & \text{Para } z > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2} \hat{z} & \text{Para } z < 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

Y siguiendo el mismo razonamiento que en apartados anteriores, para nuestro condensador relleno de material dieléctrico, si despreciamos efectos de borde, el vector desplazamiento eléctrico en todo punto del espacio será.

$$\vec{D} = \begin{cases} \rho_s \hat{z} & \text{En el interior del condensador} \\ 0 & \text{En el resto del espacio} \end{cases} \quad (4.34)$$

Y por lo tanto el campo eléctrico en el interior del condensador será.

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho_s}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad (4.35)$$

Po otro lado, el potencial entre las placas del condensador será.

$$V = \int_0^d \vec{E}_{int} \cdot d\vec{r} = Ed \quad (4.36)$$

Si ahora nos preguntamos por la capacidad del condensador ahora que hemos introducido el dieléctrico, tendremos que.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s S}{V} = \frac{DS}{Ed} \quad (4.37)$$

Si ahora recurrimos a la ecuación 3.30, podemos reescribir la expresión anterior como.

$$C = \frac{(P + \epsilon E) S}{Ed} = \frac{\epsilon S}{d} + \frac{PS}{Ed} \quad (4.38)$$

Vemos entonces que podemos escribir la capacidad del condensador como la suma de dos términos. Ahora, según la ecuación 4.31, podemos identificar el primer término con la capacidad del condensador cuando no hay dieléctrico entre sus placas.

$$C = C_0 + \frac{PS}{Ed} \quad (4.39)$$

Tenemos entonces que la capacidad tiene dos términos, correspondiente a la capacidad en el espacio libre y otro que depende de la polarización. Ahora, utilizando que el medio dieléctrico es l.h.i, podemos utilizar que $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$ para llegar a.

$$C = C_0 + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) S}{d} = C_0 + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} - \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (4.40)$$

Que recurriendo de nuevo a la ecuación 4.31 podemos reescribir como.

$$C = C_0 + \epsilon_r C_0 - C_0 = \epsilon_r C_0 \quad (4.41)$$

Veamos ahora la energía almacenada en el condensador. Utilizando la expresión 4.32 sabemos que.

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V^2 \quad (4.42)$$

Que también se puede escribir como.

$$W = \frac{1}{2} C_0 V^2 + \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) C_0 V^2 \quad (4.43)$$

4.4. FUERZA ELECTROSTÁTICA ENTRE LAS PLACAS DE UN CONDENSADOR 49

El primer término se corresponde con la energía almacenada en el condensador cuando este está situado en el espacio libre, por lo que el segundo término ha de corresponderse con la energía almacenada en la polarización.

$$W = W_0 + W_{pol} \quad (4.44)$$

Donde

$$W_{pol} = \frac{1}{2} (\epsilon_r - 1) C_0 V^2 = (\epsilon_r - 1) W_0 \quad (4.45)$$

Es inmediato comprobar que para el espacio libre, cuando $\epsilon_r = 1$, la energía de polarización es nula.

4.3.1. Energía de polarización desde el punto de vista del campo

Según la ecuación 4.20, la energía electrostática almacenada en una distribución de cargas viene dada por.

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} dv' \quad (4.46)$$

Utilizando la ecuación 3.30 para reescribir el campo \vec{D}

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot (\vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}) dv' = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 E^2 dv' + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{P} dv' \quad (4.47)$$

Para medios lineales, homogéneos e isotrópicos, el primer sumando se corresponde con la energía electrostática en el vacío, por lo que el segundo término ha de ser igual a la energía de polarización.

$$W_{pol} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{P} \cdot \vec{E} dv' \quad (4.48)$$

4.4. Fuerza electrostática entre las placas de un condensador

Consideremos de nuevo un condensador de placas plano-paralelas. En cada una de sus placas se encuentra una cantidad de carga con valor absoluto $|Q|$, pero de signos opuestos, por lo que resulta evidente que las caras sentirán una fuerza atractiva, F_e entre ellas. De este modo, para mantener inalterado el condensador será necesaria una fuerza mecánica que contrarreste la atracción electrostática, a la que nos referiremos como F_m .

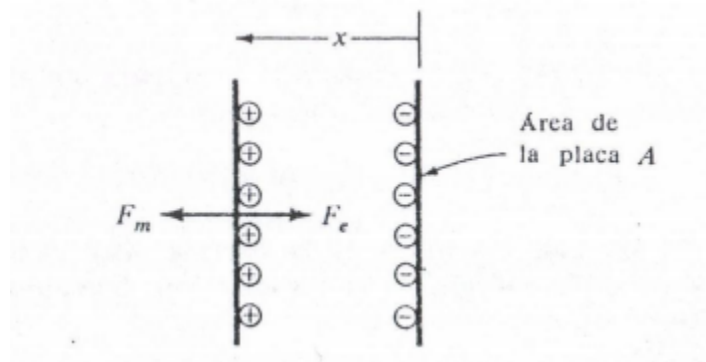


Figura 4.3: Representación de las fuerzas sobre una de las placas.

Consideremos ahora un desplazamiento virtual, Δx de una de las placas, debido a la acción de fuerzas eléctricas (podemos imaginar que lo que está ocurriendo es que retiramos

la fuerza mecánica que mantiene fijas las placas). El trabajo virtual realizado por la fuerza eléctrica será.

$$\Delta W_m = F_e \Delta x \quad (4.49)$$

Ahora tenemos que considerar dos casos, ya que el condensador puede estar o aislado o bien conectado a una fuente de potencial.

4.4.1. Condensador aislado

Consideremos pues un condensador totalmente relleno de un medio l.h.i de permeabilidad absoluta ϵ . Como el condensador está aislado, la energía total del sistema ha de permanecer constante. Esto significa que el trabajo mecánico resultante del desplazamiento virtual debe compensarse con una disminución de la energía electrostática.

$$\Delta W_m + \Delta W_e = 0 \quad (4.50)$$

Despejando y utilizando la ecuación 4.49 llegamos a

$$F_e = -\frac{\Delta W_e}{\Delta x} \quad (4.51)$$

Ahora, si consideramos variaciones infinitesimales, tendremos la siguiente expresión.

$$F_e = -\frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (4.52)$$

Veamos entonces cuanto vale esta fuerza. En primer lugar, tenemos que la energía electrostática almacenada en un condensador plano-paralelo es.

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.53)$$

Sin embargo, esta expresión no nos es demasiado útil, ya que un condensador aislado no está conectado a una batería que mantenga constante su voltaje al modificar la distancia entre placas. Por otro lado, al no estar conectado a baterías, no existe nada que modifique la carga almacenada en las caras del condensador, por lo que esta se mantendrá constante. De este modo, utilizando que $C = \frac{Q}{V}$

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} \quad (4.54)$$

Utilizando la ecuación 4.31, podemos escribir la capacidad en función de la distancia ente placas.

$$W_e = \frac{Q^2}{2A\epsilon} x \quad (4.55)$$

Vemos pues que la energía almacenada es mayor cuanto más grande sea la distancia entre las placas. Para obtener la fuerza, no hay más que emplear la ecuación 4.52

$$F_e = -\frac{Q^2}{2A\epsilon} \quad (4.56)$$

Se puede ver que la fuerza tiene un signo negativo, ya que tiende a disminuir la energía almacenada (al intentar juntar las placas del condensador).

4.4.2. Condensador conectado a baterías

Ahora, en lugar de un condensador aislado, tenemos uno conectado a una fuente de energía que permite una variación de carga en las placas, y que mantiene constante la diferencia de potencial entre las mismas. Para hacer el balance de energías, tendremos que

tener en cuenta que ahora el entorno (baterías) puede hacer un trabajo, al que nos referimos como W_b

$$\Delta W_m + \Delta W_e = \Delta W_b \quad (4.57)$$

Recurriendo a la expresión 4.31, es sencillo calcular la variación en la capacidad del condensador cuando las placas se acercan una distancia Δx

$$\Delta C = A\epsilon \left(\frac{1}{x - \Delta x} - \frac{1}{x} \right) = A\epsilon \frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)} \quad (4.58)$$

Esta variación de la la capacidad lleva asociada una variación de la carga almacenada en las placas (ya que el voltaje es constante).

$$Q = CV \implies \Delta Q = (\Delta C) V \quad (4.59)$$

Y por lo tanto, podremos expresar la variación de energía electrostática en función de esta variación de carga.

$$W_e = \frac{1}{2} QV \implies \Delta W_e = \frac{1}{2} V \Delta Q \quad (4.60)$$

Que en función del desplazamiento de las placas es

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)} A\epsilon V^2 \quad (4.61)$$

Por otro lado, tenemos el trabajo realizado por las baterías. Estas transportan una cantidad de carga ΔQ de una placa a otra. De este modo, el trabajo realizado por las baterías vendrá dado por la ecuación 2.41

$$W_b = V \Delta Q = \frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)} A\epsilon V^2 \quad (4.62)$$

De esta manera, se comprueba fácilmente que.

$$W_b = 2W_e \quad (4.63)$$

Así, la ecuación 4.57 se convierte en

$$\Delta W_b + \Delta W_e = 2\Delta W_e \quad (4.64)$$

Despejando de esta ecuación, y empleando la expresión 4.49 llegamos a la siguiente expresión para la fuerza.

$$F_e = \frac{\Delta W_e}{\Delta x} \quad (4.65)$$

Y si de nuevo consideramos desplazamientos infinitesimales

$$F_e = \frac{\partial W_e}{\partial x} \quad (4.66)$$

Llegamos a la misma expresión que para el condensador aislado, pero con el signo cambiado. Para estudiar la causa de esto, no hay más que calcular la energía electrostática almacenada, ayudándonos de la ecuación 4.31.

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{A\epsilon}{x} V^2 \quad (4.67)$$

Ahora la energía aumenta al juntar las placas, y no al contrario, de ahí el cambio de signo. Si ahora sustituimos en la expresión 4.66 podemos calcular la fuerza.

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{A\epsilon}{x^2} V^2 \quad (4.68)$$

Que como es de esperar tiene signo negativo, ya que tiende a unir ambas placas (que en este caso implica un incremento de la energía electrostática almacenada).

4.5. Presión electrostática

Volvamos al caso del condensador plano aislado. Según las ecuaciones 4.56 y 4.32, podemos escribir la fuerza sobre sus placas como.

$$F_e = -\frac{W_e}{x} \quad (4.69)$$

Si ahora introducimos de nuevo la idea de densidad de energía electrostática, y si v es el volumen encerrado entre las placas del conductor, podemos expresar la fuerza como.

$$F_e = -\frac{w_e v}{x} = -\frac{w_e (Ax)}{x} = w_e A \quad (4.70)$$

Y por lo tanto, la fuerza por unidad de superficie, a la que nos referiremos como presión electrostática, será.

$$\frac{F_e}{A} = w_e \equiv f_e \quad (4.71)$$

Vectorialmente, la fuerza sobre las placas será

$$\vec{f}_e = w_e \hat{n} \quad (4.72)$$

A continuación, trataremos de generalizar este razonamiento. Consideremos la superficie de un determinado medio conductor, tal y como se muestra en la siguiente figura.

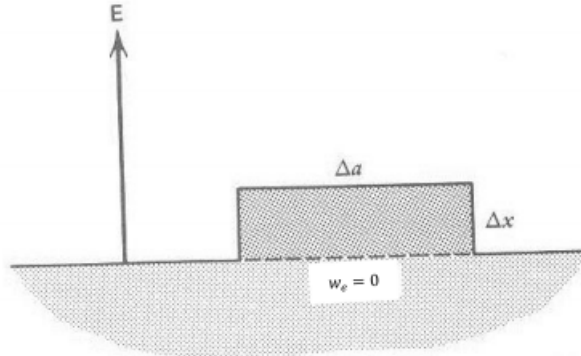


Figura 4.4: Superficie de un material conductor, donde se está considerando un desplazamiento virtual debido a fuerzas electrostáticas en una parte de la misma.

La densidad de energía electrostática, w_e , viene dada por la ecuación 4.22. En temas anteriores hemos demostrado que el campo eléctrico en el interior de los conductores en equilibrio electrostático es nulo, así que la densidad de energía electrostática en su interior será nula también. De esta manera, al considerar el desplazamiento virtual de la figura 4.4, la variación de energía electrostática será.

$$\Delta W_e = -w_e \Delta a \Delta x \quad (4.73)$$

Sin más que despejar

$$-\frac{W_e}{\Delta x} = w_e \Delta a \quad (4.74)$$

Al estar en un caso donde $Q = cte$, el primer término se corresponde con la fuerza electrostática, según la ecuación 4.56

$$F_e = \Delta w_e \Delta a \quad (4.75)$$

Y recuperamos de nuevo la expresión de la presión electrostática.

$$f_e = \frac{F_e}{\Delta a} = w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (4.76)$$

Ahora podemos emplear la ecuación 3.6 para expresar la presión electrostática en función de la densidad superficial de carga.

$$f_e = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0} \quad (4.77)$$

Que en forma vectorial es

$$\vec{f}_e = \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (4.78)$$

Recordemos que esta es una fuerza por unidad de superficie, por lo que si queremos obtener la fuerza total sobre un conductor, tendremos que integrarla sobre toda la superficie S del mismo

$$\vec{F}_e = \int_S f_e d\vec{s} = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \rho_s^2 d\vec{s} \quad (4.79)$$

4.5.1. Ejemplo: Esfera cortada por un plano

Consideremos una esfera conductora homogénea de radio R en la que existe una carga Q (estamos suponiendo equilibrio electrostático, por lo que dicha carga estará situada en la superficie). Como la esfera es homogénea, la carga también se distribuirá de esa manera, por lo que la densidad superficial de carga será.

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi R^2} = cte \quad (4.80)$$

Calculemos la fuerza total sobre esta esfera usando la presión electrostática.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \rho_s^2 d\vec{s} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \int_S d\vec{s} \quad (4.81)$$

Ahora, en coordenadas esféricas, $d\vec{s} = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$. Sustituyendo en la expresión anterior

$$\vec{F}_e = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta = 0 \quad (4.82)$$

Que es el único resultado lógico, y no tiene demasiado interés, pero sirve de práctica para lo que haremos a continuación, además de convencernos de que la teoría es correcta.

Consideremos ahora que a nuestra esfera le hemos realizado un corte, separándola en dos mitades no necesariamente iguales, tal y como se indica en la figura.

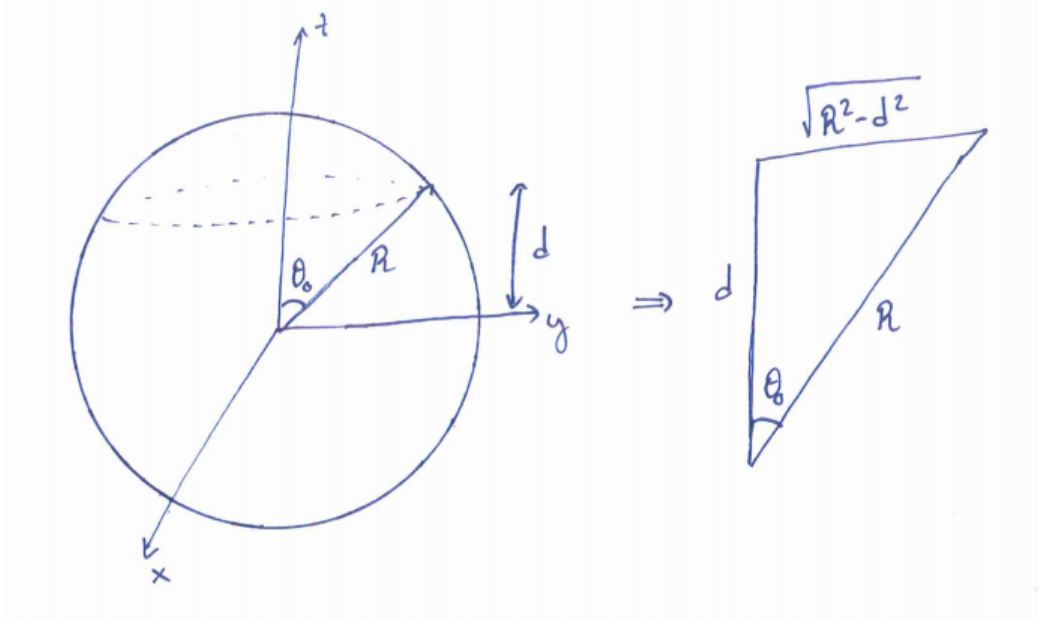


Figura 4.5: Esfera conductora homogéneamente cargada cortada por un plano a una cierta altura d .

Ahora las dos partes en las que se ha dividido la esfera actúan como cuerpos independientes. Busquemos pues la fuerza electrostática que actúa sobre la mitad superior.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_S \rho_s^2 d\vec{s} \quad (4.83)$$

La distribución superficial de carga será la misma que antes, por lo que.

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \int_S d\vec{s} \quad (4.84)$$

E introduciendo el correspondiente elemento diferencial de superficie

$$\vec{F}_e = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin(\theta) \hat{r} d\theta \quad (4.85)$$

Y expandiendo \hat{r} tenemos que.

$$\vec{F}_e = \frac{R^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin \theta (\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}) d\theta \quad (4.86)$$

Es sencillo ver que las componentes x e y de la fuerza se anulan, por lo que nos queda

$$\vec{F}_e = \frac{\pi}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 R^2 \hat{z} \int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi R^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \sin^2 \theta_0 \hat{z} \quad (4.87)$$

Eliminando el paréntesis

$$\vec{F}_e = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} \sin^2 \theta_0 \hat{z} \quad (4.88)$$

Si ahora nos fijamos en el triángulo de la figura, es inmediato deducir que

$$\sin \theta_0 = \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{R} \quad (4.89)$$

Y por lo tanto, la fuerza sobre el fragmento superior será

$$\vec{F}_e = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^4} (R^2 - d^2) \hat{z} \quad (4.90)$$

4.6. Autoenergía electrostática

Vamos a empezar esta sección calculando la energía electrostática de configuración de una esfera homogénea de radio a cargada con una carga Q , con una densidad volumétrica de carga $\rho_v = \text{cte}$. Para ello, construiremos la esfera por capas. Pensemos entonces en una fase intermedia, en la que la esfera tiene un radio r , y calculemos el trabajo necesario para traer la carga suficiente para formar otra capa desde el infinito hasta la superficie de la esfera.

En primer lugar, interesa el campo electrostático generado por la esfera de radio r . Para ello, consideremos una superficie esférica S de radio $R \geq r$ concéntrica a nuestra esfera. Por simetría, el campo eléctrico generado por la esfera será de la forma $\vec{E} = E(R) \hat{r}$, por lo que su flujo, Φ a través de S será

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{r} = 4\pi R^2 E(R) \quad (4.91)$$

Por otro lado, la carga encerrada en el interior de S será

$$Q_{enc} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v \quad (4.92)$$

Y por lo tanto, según la ley de Gauss

$$\vec{E}(R) = \frac{r^3 \rho_v}{3R^2 \epsilon_0} \hat{r} \quad (4.93)$$

Ahora, la cantidad de carga necesaria para crear una nueva capa será igual a la densidad volumétrica de carga multiplicada por el "volumen" de esa capa

$$dq = 4\pi \rho_v dr \quad (4.94)$$

El trabajo infinitesimal para traer esta cantidad de carga desde el infinito hasta la superficie esférica será

$$dW = \Delta V dq \quad (4.95)$$

Donde ΔV viene dado por

$$\Delta V = V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E dR = \int_r^\infty \frac{r^3 \rho_v}{3R^2 \epsilon_0} dR = \frac{\rho_v r^2}{3\epsilon_0} \quad (4.96)$$

Y por lo tanto, la cantidad de trabajo necesaria para crear una nueva capa (en función del radio de la esfera) será

$$dW(r) = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_v^2 r^4}{\epsilon_0} dr \quad (4.97)$$

Y para hallar la energía electrostática de configuración de nuestra esfera de radio a , no hay más que integrar esta expresión entre todos los radios intermedios durante la construcción de la esfera

$$W = \int_0^a dW = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_v^2}{\epsilon_0} \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi}{15} \frac{a^5 \rho_v^2}{\epsilon_0} \quad (4.98)$$

Ahora bien. Si Q es la carga total de la esfera, podemos escribir la densidad volumétrica como

$$\rho_v = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (4.99)$$

Y por lo tanto la energía será

$$W = \frac{4\pi}{15} \frac{a^5}{\epsilon_0} \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right)^2 \quad (4.100)$$

Que, simplificando, se puede expresar como

$$W = \frac{3Q^2}{20\pi a\epsilon_0} \quad (4.101)$$

Ahora que ya tenemos este resultado, pensemos por un momento en el electrón. Aunque hasta ahora los hemos considerado como puntos sin volumen, esto claramente no refleja la realidad clásica. Si nos acercamos a escalas atómicas, no sería descabellado pensar en el electrón como en una esfera muy pequeña, con un radio que tiende a cero. De esta manera, sería posible aplicar la ecuación 4.101 para calcular la energía de configuración de un electrón, a la que nos referiremos como autoenergía electrostática. Sin embargo, al hacer esto nos encontramos con que

$$W_{auto} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{3e_-^2}{20\pi a\epsilon_0} = \frac{3e_-^2}{20\pi\epsilon_0} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} = \infty \quad (4.102)$$

Hemos llegado a algo aparentemente absurdo, ya que lo que cabría esperar sería una energía nula (ya que si en el vacío existe tan solo una carga puntual la energía necesaria para llevarla desde el infinito hasta su posición actual es nula, porque esto equivale a no moverla). Esta contradicción se debe a que el cálculo que hemos utilizado está fundamentalmente equivocado. Al realizarlo, hemos asumido que vamos formando la esfera a partir de cantidades pequeñas de carga, pero en el caso del electrón, esto no es posible, ya que el propio electrón es la unidad fundamental de carga, por lo que es imposible formarlo a partir de cargas más pequeñas. Hemos llegado pues a una de las limitaciones de la teoría electrostática, y es que no nos permite describir adecuadamente a las unidades fundamentales de carga.

Capítulo 5

Métodos especiales en electrostática.

En temas anteriores, hemos deducido a partir del teorema de Helmholtz la expresión que nos permite calcular el potencial escalar eléctrico generado por un conjunto de cargas puntuales o por una distribución continua de carga. Sin embargo, hay ocasiones en las que estas expresiones no nos resultan demasiado útiles, bien porque no conocemos la función de distribución de la carga en todo el espacio o bien porque las integrales resultantes son excesivamente complejas. En estos casos, utilizaremos otro método, basado en resultados que ya hemos deducido antes: la resolución de las ecuaciones de Laplace y Poisson.

5.1. Unicidad de solución de la ecuación de Laplace

Recordemos la expresión de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (5.1)$$

Esta es la forma homogénea de la ecuación de Poisson, y es aplicable a regiones del espacio que no contienen carga en su interior. En esta sección demostraremos que si hemos obtenido una solución a esta ecuación que satisfaga unas ciertas condiciones de contorno, entonces dicha solución es única.

Supongamos de momento que contamos con dos soluciones para la ecuación de Laplace en una determinada región, y con unas determinadas condiciones de contorno, a las que nos referiremos como $\phi_1(\vec{r})$ y $\phi_2(\vec{r})$. Ahora, construimos la siguiente función.

$$\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad (5.2)$$

Veamos lo que ocurre si aplicamos el operador laplaciano a esta función

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 - \nabla^2 \phi_2 \quad (5.3)$$

Pero como tanto ϕ_1 como ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 + 0 = 0 \quad (5.4)$$

Y por lo tanto ϕ es también una solución a la ecuación de Laplace. En cuanto a las condiciones de contorno que verifica ϕ , tenemos que, sobre la frontera

$$\phi_1|_{\text{frontera}} = \phi_2|_{\text{frontera}} \quad (5.5)$$

Y por lo tanto

$$\phi_3|_{\text{frontera}} = 0 \quad (5.6)$$

Ahora, utilizando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (u\vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla u + u \nabla \cdot \vec{A} \quad (5.7)$$

Obtenemos que

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 \phi \quad (5.8)$$

Y recordando que ϕ verifica la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = (\nabla \phi)^2 \quad (5.9)$$

Ahora, podemos integrar ambos miembros en el volumen τ ocupado por la región donde estamos resolviendo la ecuación, y aplicar el teorema de la divergencia

$$\int_{\tau} (\nabla \phi)^2 dv = \int_{\tau} \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) dv = \oint_S \phi \nabla \phi ds \quad (5.10)$$

Y como sabemos que en la superficie S (la frontera), $\phi = 0$

$$\int_{\tau} (\nabla \phi)^2 dv = 0 \quad (5.11)$$

Esto solo se verifica si el integrando es cero en todos los puntos del volumen

$$(\nabla \phi)^2 = 0 \quad (5.12)$$

Si ahora expandimos este integrando, llegamos a que es igual a una suma de cuadrados

$$(\nabla \phi)^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 = 0 \quad (5.13)$$

Esto solo se verifica si todos los sumandos son nulos, lo que nos lleva a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5.14)$$

Y por lo tanto

$$\phi = cte \quad (5.15)$$

No obstante, como sabemos que en la frontera, $\phi = 0$, sabemos que $\phi = 0$ en todo el volumen τ . Si ahora volvemos a la definición de esta función

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 = 0 \implies \phi_1 = \phi_2 \quad (5.16)$$

Llegamos entonces a que las dos posibles soluciones son en realidad la misma, por lo que hemos demostrado que bajo unas determinadas condiciones de contorno, la solución a la ecuación de Laplace es única.

5.2. Unicidad de solución de la ecuación de Poisson

Ahora probaremos que, al igual que la ecuación de Laplace, la solución a la ecuación de Poisson es única una vez se fijan las condiciones de contorno. Para ello, consideremos un volumen τ limitado por una superficie S. Dentro de este volumen pueden existir tanto regiones conductoras como regiones dieléctricas en las que exista carga (recordemos que el vacío es un caso particular de un dieléctrico). Para todas las regiones dieléctricas en las que exista carga, libre o ligada, necesitaremos especificar la densidad de carga $\rho_v(\vec{r})$, y en las regiones conductoras necesitaremos especificar la carga total de ese conductor o bien el potencial de

esa región (recordando que los conductores son volúmenes equipotenciales). Si ahora especificamos el valor del potencial en la superficie S, la solución a la ecuación de Poisson será única.

Para demostrarlo, procederemos de manera similar a como hicimos con la ecuación de Laplace. Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos soluciones a la ecuación de Poisson que verifican las condiciones de frontera. A partir de estas dos soluciones podemos construir una nueva función.

$$\phi_3 \equiv \phi_1 - \phi_2 \quad (5.17)$$

Podemos definir también el siguiente campo vectorial

$$\vec{E}_3 = -\nabla\phi_3 \quad (5.18)$$

Veamos lo que le ocurre a ϕ_3 en las distintas regiones del volumen τ . En primer lugar, en las regiones de este volumen en las que no exista carga (lo cual incluye el interior de los conductores), tanto ϕ_1 como ϕ_2 verificarán la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = 0 \quad (5.19)$$

Y por lo tanto

$$\nabla^2\phi_3 = 0 \quad (5.20)$$

Por otro lado, en las regiones dieléctricas donde hemos especificado la densidad de carga, ϕ_1 y ϕ_2 cumplirán la misma ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi_1 = \nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho_v(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (5.21)$$

Y de esta manera, en estas regiones

$$\nabla^2\phi_3 = 0 \quad (5.22)$$

En la superficie frontera S, donde como ϕ_1 y ϕ_2 cumplen las mismas condiciones de contorno

$$\phi_3 = \phi_1|_{frontera} - \phi_2|_{frontera} = 0 \quad (5.23)$$

Y lo mismo ocurre en aquellas superficies conductoras donde esté especificado el potencial.

$$\phi_3|_{sup.conductora} = \phi_1|_{sup.conductora} - \phi_2|_{sup.conductora} = 0 \quad (5.24)$$

Sin embargo, como hemos dicho antes, podemos tener superficies conductoras donde el potencial no esté fijado, pero en las que conocemos la carga total Q. En principio no podemos asegurar que ϕ_3 se anule en estas regiones, tan solo que ha de ser constante. Para discutir estas regiones, consideremos las siguientes integrales.

$$I_0 = \oint_S \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} \quad (5.25)$$

$$I_i = \oint_{S_i} \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} \quad (5.26)$$

Donde las S_i son superficies cerradas infinitamente cerca de las superficies de las regiones conductoras, de tal manera que el campo eléctrico será normal a la superficie en todo punto, y el potencial será constante en estas superficies, e igual al potencial del conductor. La integral I_0 se anula en todo momento, ya que sabemos que $\phi_3|_{frontera} = 0$, y por el mismo motivo, I_i se anula en las S_i en torno a los conductores con el potencial fijo. Para los conductores con carga fija, utilizando la ley de Gauss

$$I_i = \phi_3 \oint_{S_i} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = \phi_3 \left[\oint_{S_i} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} - \oint_{S_i} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} \right] = \phi_3 \left[\frac{Q}{\epsilon_0} - \frac{Q}{\epsilon_0} \right] = 0 \quad (5.27)$$

Donde $\vec{E}_i = -\nabla\phi_i$. Hemos llegado entonces que en todas las superficies conductoras y en la frontera S , las integrales I_0 e I_i se anulan. Ahora podemos pensar en el volumen limitado exteriormente por S e interiormente por las S_i , al que nos referiremos como $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\tau} \equiv \tau - \sum_i \tau_i \quad (5.28)$$

Donde los τ_i son los volúmenes ocupados por las regiones conductoras. Ahora, según el teorema de la divergencia, para un campo vectorial cualquiera, \vec{C} , tendremos que

$$\int_{\tilde{\tau}} (\nabla \cdot \vec{C}) dv = \oint_S \vec{C} \cdot d\vec{s} - \sum_i \oint_{S_i} \vec{C} \cdot d\vec{s} \quad (5.29)$$

Donde el signo menos está para corregir el hecho de que en las integrales sobre las S_i , el vector $d\vec{s}$ está definido hacia el interior de $\tilde{\tau}$, en lugar de hacia el exterior. Ahora, haciendo que $\vec{C} = \phi_3 \vec{E}_3$, tenemos que

$$\int_{\tilde{\tau}} (\nabla \cdot \phi_3 \vec{E}_3) dv = \oint_S \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} - \sum_i \oint_{S_i} \phi_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = I_0 - \sum_i I_i = 0 \quad (5.30)$$

Si ahora expandimos la divergencia

$$\nabla \cdot (\phi_3 \vec{E}_3) = \nabla\phi_3 \cdot \vec{E}_3 + \phi_3 \nabla \cdot \vec{E}_3 = \nabla\phi_3 \cdot \vec{E}_3 - \phi_3 \nabla^2\phi_3 \quad (5.31)$$

Ahora, recordemos que en el interior de $\tilde{\tau}$ solo existen regiones dieléctricas o regiones sin carga, donde ya hemos demostrado que ϕ_3 verifica la ecuación de Laplace. Por lo tanto

$$\nabla \cdot (\phi_3 \vec{E}_3) = \nabla\phi_3 \cdot \vec{E}_3 = -E_3^2 \quad (5.32)$$

Juntándolo todo, llegamos a la siguiente igualdad

$$\int_{\tilde{\tau}} E_3^2 dv = 0 \quad (5.33)$$

Como el integrando es positivo y la integral nula, el integrando ha de ser nulo en todo el volumen $\tilde{\tau}$

$$E_3^2 = 0 \implies E_3 = 0 \implies \phi_3 = cte \quad (5.34)$$

Y por lo tanto, $\phi_3 = cte$ en todo $\tilde{\tau}$, y como en la superficie S $\phi_3 = 0$, entonces $\phi_3 = 0$ en $\tilde{\tau}$. Además, como los conductores (que son las únicas regiones de τ que no están en $\tilde{\tau}$) son volúmenes equipotenciales, ϕ_3 valdrá en ellos lo mismo que en las S_i , que por estar en $\tilde{\tau}$ están a $\phi_3 = 0$, y por lo tanto, en el interior de los conductores ϕ_3 será nulo también. Por lo tanto, hemos demostrado que para todo punto en el interior de τ

$$\phi_3 = \phi_1 - \phi_2 = 0 \quad (5.35)$$

Y por lo tanto ambas soluciones, ϕ_1 y ϕ_2 , son idénticas en todo punto, y ya hemos demostrado que bajo estas condiciones, la solución a la ecuación de Poisson es única.

5.3. Método de las imágenes

En este apartado, aprovecharemos los dos teoremas de unicidad que acabamos de demostrar para simplificar en gran medida varios problemas electrostáticos. La idea de este método es sustituir distribuciones de carga complicadas que estén fuera de la región donde queremos calcular el campo por cargas puntuales, de manera que se satisfagan las condiciones de contorno y que el potencial resultante verifique la ecuación de Laplace (o de Poisson).

De esta manera, como la solución es única, dará igual que lleguemos a ella a través de cargas que en realidad no existen.

La idea es que, dado un conjunto de cargas puntuales y varias distribuciones complejas de carga, así como unas determinadas condiciones de contorno, seamos capaces de llegar a una solución de la forma

$$\phi = \sum_{\text{Reales}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} + \sum_{\text{Ficticias}} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5.36)$$

Tal que ϕ satisfaga las condiciones de contorno y verifique la ecuación que le corresponda (Laplace o Poisson). A continuación resolveremos dos ejemplos clásicos utilizando este método.

5.3.1. Ejemplo 1: Carga puntual enfrentada a un plano conductor

Vamos a considerar una carga q situada sobre un plano conductor infinito conectado a tierra a una distancia d del mismo, tal y como se muestra en la figura. Estamos interesados en calcular el potencial en la región sobre el plano, donde se encuentra nuestra carga puntual.

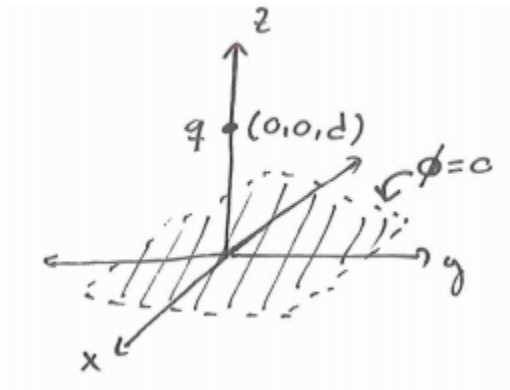


Figura 5.1: Situación real. Buscamos el potencial $\phi(x, y, z)$ para $z > 0$

Matemáticamente, buscamos una solución a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon_0} \quad \text{Donde } \vec{r}_0 = (0, 0, d) \quad (5.37)$$

Con las siguientes condiciones de contorno

$$\phi(x, y, 0) = 0 \quad (5.38)$$

$$\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \phi(\vec{r}) = 0 \quad (5.39)$$

Olvidémonos por un momento del plano conductor, y consideremos la siguiente situación

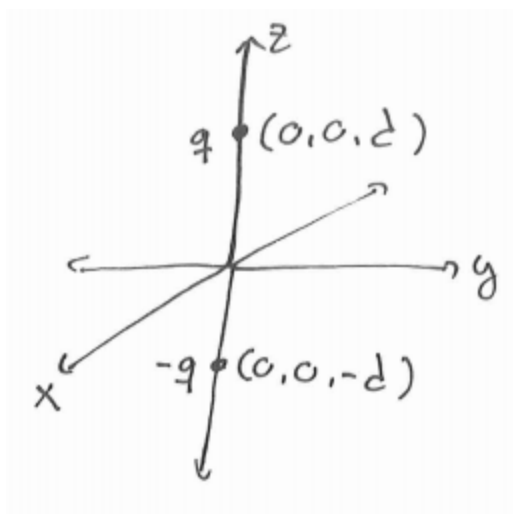


Figura 5.2: Situación ficticia en la que hemos introducido una carga imagen

El potencial generado por esta distribución de cargas puntuales vendrá dado por

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right) \quad (5.40)$$

Es sencillo comprobar que este potencial verifica las condiciones de contorno de nuestro problema inicial. Ver que cumple la ecuación de Poisson en esa región no es tan trivial, ya que aplicando el operador laplaciano a este potencial obtenemos que $\nabla^2\phi = 0$. Sin embargo, estamos cometiendo el error de no tener en cuenta el punto $(0, 0, d)$, y es posible demostrar que en ese punto se verifica la ecuación de Poisson tal y como hicimos en temas anteriores al introducir la función delta de Dirac.

En resumen, hemos encontrado una solución para la ecuación de Poisson en un determinado volumen que cumple unas determinadas condiciones de contorno. Según el teorema de unicidad de solución para la ecuación de Poisson, esta solución será única, por lo que podemos decir que, para $z > 0$, el potencial será

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \right) \quad (5.41)$$

Por supuesto, esta ecuación no describe adecuadamente el potencial en la región con $z < 0$, pero como no es nuestra zona de interés, no tiene mayor relevancia. A la carga ficticia $-q$ se la conoce como la imagen electrostática de la carga q .

Por supuesto, ahora que conocemos el potencial escalar, es sencillo calcular el campo eléctrico sin más que utilizar que $\vec{E} = -\nabla\phi$. También es posible calcular la carga total inducida sobre el plano (que resulta ser $-q$), así como la densidad superficial de carga en dicho plano¹.

5.3.2. Ejemplo 2: Carga puntual enfrentada a una esfera conductora

Ahora resolveremos el caso de una carga puntual enfrentada a una esfera conductora conectada a tierra, como se muestra en la siguiente figura.

¹Ver [1], sección 3.2.2

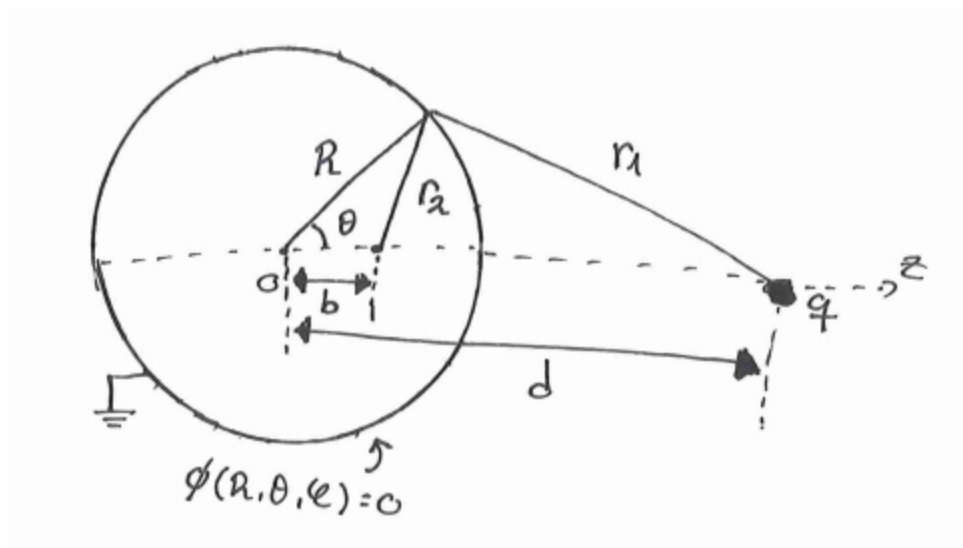


Figura 5.3: Situación real. Buscamos el potencial $\phi(r, \theta, \varphi)$ para $r > R$

Matemáticamente, para obtener el potencial fuera de la esfera conductora tendremos que resolver la siguiente ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)}{\epsilon_0} \quad \text{Donde } \vec{r}_0 = (0, 0, d) \quad (5.42)$$

Las condiciones de contorno que tenemos que imponer son

$$\phi(R, \theta, \varphi) = 0 \quad (5.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (5.44)$$

Ahora vamos a olvidarnos de la esfera conductora y considerar la siguiente configuración de cargas puntuales.

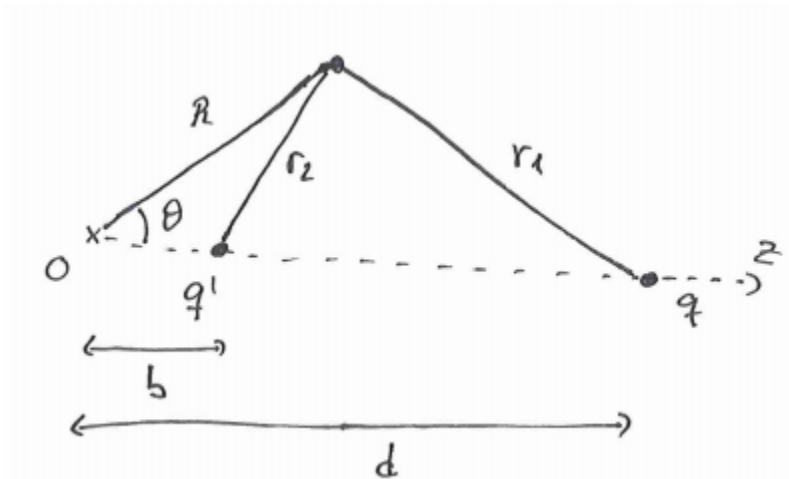


Figura 5.4: Situación ficticia en la que hemos introducido la carga imagen q'

Donde b y q' toman los siguientes valores

$$b = \frac{R^2}{d} \quad (5.45)$$

$$q' = -q \frac{R}{d} \quad (5.46)$$

Ahora podemos calcular el potencial escalar generado por esta distribución de carga, que será

$$\phi(r_1, r_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{r_2 d} \right) \quad (5.47)$$

Que en función del ángulo θ se puede escribir como

$$\phi(r, \theta, \phi) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{R}{d \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - \frac{2rR^2}{d} \cos \theta}} \right) \quad (5.48)$$

Se puede comprobar que esta función satisface la ecuación de Poisson en la región con $r > R$ y que verifica las condiciones de contorno. Así pues, el teorema de unicidad de solución para la ecuación de Poisson nos garantiza que esta no solo es la solución correcta, sino que es la única solución.

Al igual que en el caso del plano, a la carga q' se la conoce como imagen electrostática de la carga q .

5.4. Solución de la ecuación de Laplace

A las funciones que cumplen la ecuación de Laplace se las conoce como funciones armónicas, y son de gran utilidad para resolver problemas en electrostática, ya que se conoce su forma general. Existen distintos tipos de funciones armónicas, dependiendo del sistema de coordenadas en el que estemos trabajando.

<p>Armónicos rectangulares</p> $\phi = C_1xyz + C_2xy + C_3yz + C_4zx + C_5x + C_6y + C_7z + C_0$ $\phi = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \alpha_n x + B_n \sin \alpha_n x) (C_n e^{\alpha_n y} + D_n e^{-\alpha_n y})$ <p>Armónicos cilíndricos</p> $\phi = (F \ln(r) + F) (H\theta + C_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta)$ <p>Armónicos esféricos</p> $\phi = C_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) (C_n P_n(\cos \theta) + D_n Q_n(\cos \theta))$
--

Cuadro 5.1: Soluciones generales a la ecuación de Laplace en distintos sistemas de coordenadas. Las funciones P_n y Q_n son los polinomios de Legendre de primera y segunda clase, respectivamente.

En estos apuntes no discutiremos como se llega a estas soluciones, ya que no es el objetivo de esta asignatura². En cuanto a los polinomios de Legendre que aparecen en estas soluciones, su forma se muestra en la siguiente tabla.

²Estas soluciones se justifican detalladamente en Métodos Matemáticos V

n	$P_n(\mu)$	$Q_n(\mu)$
0	1	$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right)$
1	μ	$\frac{1}{2} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - 1$
2	$\frac{1}{2} (3\mu^2 - 1)$	$\frac{1}{4} (3\mu^2 - 1) \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \frac{3}{2} \mu$
3	$\frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu)$	$\frac{1}{2} P_3(\mu) \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) - \frac{5}{3} P_2(\mu) - \frac{1}{6}$

Cuadro 5.2: Polinomios de Legendre de primera y segunda clase

5.4.1. Ejemplo: Potencial generado por una corteza esférica.

Consideremos el caso de una esfera (no conductora) en cuya superficie existe una distribución superficial de carga ρ_s con la siguiente forma

$$\rho_s = \rho_0 \cos \theta \quad (5.49)$$

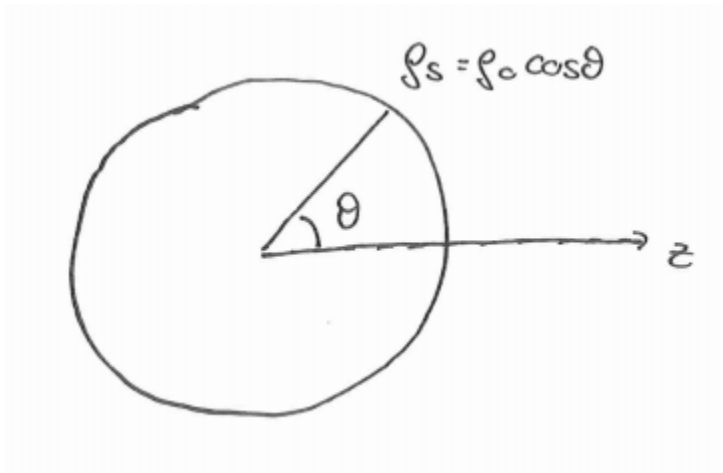


Figura 5.5: Esfera no conductora con una densidad superficial de carga que depende del ángulo acimutal, θ

En primer lugar, nuestro problema tiene claramente una simetría esférica, y además cuenta con dos regiones bien diferenciadas. La región interior ($r < R$) y la exterior ($r > R$). Planteamos entonces la solución general de la ecuación de Laplace en función de los armónicos esféricos.

$$\phi_{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (5.50)$$

$$\phi_{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) \quad (5.51)$$

En nuestra propuesta de solución no aparecen los polinomios de Legendre de segunda clase, ya que nada en la simetría de este problema nos sugiere dependencias de tipo logarítmico³. Ahora debemos considerar diversas condiciones de contorno que nos determinarán las diversas constantes que aparecen en la solución general.

Fijémonos primero en la solución para $r < R$. La región en la que existe esta solución

³Es posible llegar a la solución general considerando estas funciones desde el principio, es solo más tedioso.

incluye el origen, y la solución que buscamos ha de ser finita en ese punto. De esta manera, podemos afirmar que

$$B_n = 0 \quad \forall n \quad (5.52)$$

De forma similar, nos gustaría que el potencial tendiese a cero lo suficientemente lejos de la distribución de carga (cuando $r \rightarrow \infty$). Para ello, tendremos que asegurarnos de que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{ext} = 0 \quad (5.53)$$

Es sencillo deducir que la condición necesaria y suficiente para garantizar esto es

$$C_n = 0 \quad \forall n \quad (5.54)$$

Además, es evidente que las dos soluciones han de ser idénticas cuando $r = R$, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{R^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (5.55)$$

Ahora utilizaremos un hecho que no vamos a demostrar, y es que los polinomios de Legendre son ortogonales entre si. En la asignatura de Métodos Matemáticos V se hace un mayor inciso en lo que significa este concepto, pero para lo que nos interesa ahora es suficiente la idea de que es imposible construir un polinomio de Legendre a partir de una combinación lineal del resto de ellos, es decir

$$P_k(\mu) \neq \sum_{n=0}^{k-1} A_n P_n(\mu) + \sum_{n=k+1}^{\infty} B_n P_n(\mu) \quad (5.56)$$

Esto nos permite afirmar, a partir de la ecuación 5.55

$$A_n R^n = \frac{D_n}{R^{n+1}} \quad (5.57)$$

Reorganizando términos e introduciéndolos en las soluciones, reducimos el problema a hallar una última constante.

$$\phi_{int} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (5.58)$$

$$\phi_{ext} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n R^{2n+1}}{r^{r+1}} P_n(\cos \theta) \quad (5.59)$$

Ahora vamos a calcular las A_n . Para ello, utilizaremos un resultado de temas anteriores, el comportamiento de las componentes normales de \vec{D} (ecuación 3.46), que nos garantiza que, cuando $r = R$

$$\left(\vec{D}_{ext} - \vec{D}_{int} \right) \cdot \hat{r} = \rho_s \quad (5.60)$$

Estamos en el vacío, que es un medio lineal, homogéneo e isotrópico, por lo que podemos expresar esta relación en función del campo eléctrico

$$\left(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int} \right) \cdot \hat{r} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (5.61)$$

Y en función de nuestras soluciones a la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial \phi_{int}}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \cos \theta}{\epsilon_0} \quad (5.62)$$

Realizando estas derivadas

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n R^{n-1} + (n+1) \frac{R^{2n+1}}{R^{n+2}} \right) P_n(\cos \theta) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \theta \quad (5.63)$$

Dado que $\cos \theta$ es uno de los polinomios de Legendre, sabemos que es imposible construirlo sumando polinomios de Legendre que no sean el propio coseno. De esta manera, podemos decir que

$$A_n = 0 \quad \forall n \neq 1 \quad (5.64)$$

Y para $n = 1$, tenemos que

$$3A_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \implies A_1 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \implies D_1 = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0} \quad (5.65)$$

Y ya hemos llegado a la expresión del potencial escalar en todo punto

$$\phi_{int} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta \quad (5.66)$$

$$\phi_{ext} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta \quad (5.67)$$

Y por supuesto, a partir de estos potenciales es sencillo calcular el campo eléctrico usando que $\vec{E} = -\nabla\phi$.

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho_0 \cos \theta}{3\epsilon_0} \hat{r} - \frac{\rho_0 \sin \theta}{3\epsilon_0} \hat{\theta} \quad (5.68)$$

$$\vec{E}_{ext} = -\frac{2\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \cos \theta \hat{r} - \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^3} \sin \theta \hat{\theta} \quad (5.69)$$

Capítulo 6

Corrientes eléctricas estacionarias.

En este tema dejaremos de considerar distribuciones estáticas de carga, y permitiremos el movimiento de las mismas, dando lugar a las corrientes eléctricas, que serán de gran utilidad cuando hablemos del campo magnético.

6.1. Vector densidad de corriente

Imaginemos una superficie cualquiera en el vacío que está siendo atravesada por un determinado flujo de carga. Si buscamos una manera adecuada de definir esta cantidad, sería razonable empezar con el siguiente ratio

$$J = \frac{\Delta q}{\Delta t \Delta S} = \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (6.1)$$

Es decir, la cantidad de carga que atraviesa una sección de nuestra superficie por unidad de tiempo, donde el cociente entre la carga y el tiempo se denomina intensidad. Sin embargo, y como ocurría cuando definíamos las distribuciones de carga, esta se trata de una función discreta, y nos gustaría contar con una continua. De este modo, el módulo de lo que será nuestro vector densidad de corriente será

$$|\vec{J}| \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (6.2)$$

Por supuesto, el módulo de este vector no es suficiente para definirlo, ya que nos falta su dirección y sentido, que son tales que en cada punto, el vector densidad de corriente apunta en la dirección en la que se propaga la carga¹. Si ahora \hat{J} es el vector unitario que apunta en esta dirección, tendremos que

$$\vec{J} = J \hat{J} \quad (6.3)$$

Volviendo al concepto de intensidad, antes dijimos que venía dado por el cociente entre carga y tiempo, pero esto es de nuevo una aproximación (ya que estamos asumiendo que el flujo de carga es perpendicular a nuestra superficie). En función de nuestro vector densidad de corriente, la intensidad que atraviesa una superficie S viene dada por

$$I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (6.4)$$

¹Aquí hay que hacer un inciso, y es que hoy en día sabemos que lo que realmente se mueve son las cargas negativas. Sin embargo, antiguamente se pensaba que lo que se desplazaba eran las cargas positivas, y por ese motivo consideraremos siempre los flujos de carga como un transporte de carga positiva.

6.1.1. Relación con los portadores de carga

Imaginemos una región cualquiera del espacio libre donde existe una determinada densidad de corriente \vec{J} , que en principio puede tener cualquier forma. Sin embargo, podemos considerar una zona lo suficientemente pequeña de esta región tal que sea posible construir la situación que vemos en la figura

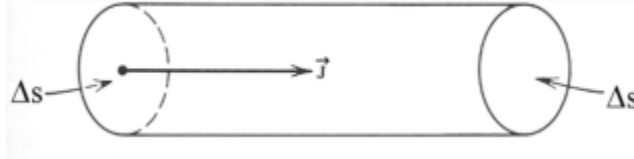


Figura 6.1: Superficie Δs que es atravesada normalmente por el vector densidad de corriente \vec{J} durante un tiempo Δt

La cantidad total de carga que atraviesa esta superficie en un tiempo Δt será

$$\Delta q = J \Delta s \Delta t \quad (6.5)$$

Ahora, a medida que la carga va atravesando la superficie, va formando el cilindro que vemos en la figura, donde se distribuye siguiendo una determinada distribución volumétrica de carga ρ_v , de modo que si Δv es el volumen del cilindro

$$\Delta q = \rho_v \Delta v \quad (6.6)$$

Ahora, igualando ambas expresiones para Δq , tenemos que

$$J \Delta s \Delta t = \rho_v \Delta v \implies J = \rho_v \frac{\Delta v}{\Delta s \Delta t} \quad (6.7)$$

Y si ahora Δl es la longitud de este cilindro

$$J = \rho_v \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad (6.8)$$

Y si ahora hacemos tender el volumen del cilindro a cero (y por lo tanto hacemos tender a cero el tiempo), tendremos que

$$J = \rho_v \frac{dl}{dt} = \rho_v V \quad (6.9)$$

Donde V es la velocidad de los portadores de carga, que como además tiene la misma dirección que \vec{J} , nos permite escribir

$$\vec{J} = \rho_v \vec{V} \quad (6.10)$$

En general, si tenemos N distribuciones de carga diferentes moviéndose con velocidades \vec{V}_i , el vector densidad de corriente vendrá dado por

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \rho_{vi} \vec{V}_i \quad (6.11)$$

6.1.2. Distribuciones de corriente superficiales y filamentosales

Al igual que con las distribuciones de carga, es razonable imaginarse densidades de corriente bidimensionales (superficiales) y unidimensionales (filamentosales).

En primer lugar, consideremos un movimiento de cargas limitado a una determinada superficie S , para el cual nos gustaría definir un vector densidad de corriente superficial al que llamaremos \vec{k} . Al igual que con las corrientes volúmicas, su sentido será el del desplazamiento de las cargas positivas. En cuanto a su magnitud, pensemos en la siguiente figura.

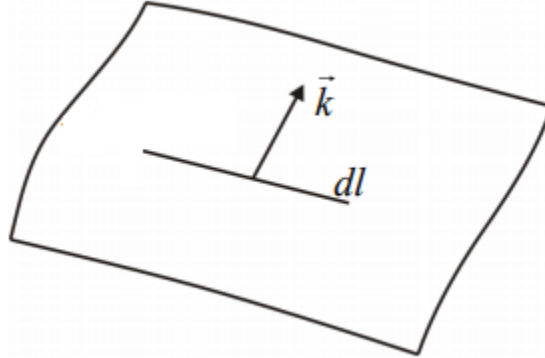


Figura 6.2: Superficie arbitraria donde existe una densidad superficial de corriente \vec{k} , y donde se ha indicado un elemento de línea dl perpendicular a la corriente.

El módulo de \vec{k} se define como la cantidad de carga que fluye por unidad de tiempo y de longitud a través de una línea imaginaria perpendicular a \vec{k} (que en la figura es el elemento de línea dl), o lo que es lo mismo, la cantidad de corriente por unidad de longitud que atraviesa dicha línea imaginaria, es decir

$$\frac{dq}{dt} = dI = k dl \quad (6.12)$$

Es posible demostrar, siguiendo un argumento parecido al del apartado anterior, que la densidad superficial de corriente se relaciona de la siguiente manera con la velocidad de los portadores de carga

$$\vec{k} = \rho_s \vec{V} \quad (6.13)$$

Finalmente, una corriente filamental es tan solo una intensidad (cociente entre carga y tiempo) con una dirección asociada, que al igual que antes es la del movimiento de las cargas positivas. Además, igual que con las otras corrientes, dada una distribución lineal de carga, y una determinada velocidad de los portadores de carga, tenemos que

$$I = \rho_l |\vec{V}| \quad (6.14)$$

6.2. El principio de conservación de la carga. Ecuación de continuidad

Experimentalmente se ha comprobado que la carga nunca se crea o se destruye. Dado un sistema aislado, la carga total del mismo permanece siempre constante, por mucho que se pueda reagrupar. Esta ley experimental, que no se puede demostrar, se conoce como el principio de conservación de la carga.

Veamos a lo que nos lleva este principio, considerando una superficie cerrada S que encierra un volumen τ , ambas situadas en presencia de una densidad de carga $\rho_v(\vec{r})$ y una densidad de corriente $\vec{J}(\vec{r})$. Bajo estas condiciones, la variación de la carga encerrada en la

superficie S vendrá dada por

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}') dv' \quad (6.15)$$

Por otro lado, el flujo de carga a través de la superficie S será

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}' \quad (6.16)$$

Ahora pensemos en lo que nos dice el principio de conservación de la carga. Si la carga no puede crearse ni destruirse, toda la carga que abandona la superficie S por medio del flujo a través de la superficie ha tenido que venir del interior de la propia superficie (el volumen τ), lo que quiere decir que el flujo y la variación de carga en el interior han de compensarse

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}' + \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}') dv' = 0 \quad (6.17)$$

Como el volumen τ no varía con el tiempo, podemos introducir la derivada en el interior de la integral si la cambiamos por una derivada parcial

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}' + \int_{\tau} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv' = 0 \quad (6.18)$$

Y si además utilizamos el teorema de la divergencia en la primera integral

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} dv' + \int_{\tau} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv' = \int_{\tau} \left(\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) dv' = 0 \quad (6.19)$$

Ahora, esta ecuación tiene que ser cierta para cualquier volumen, no solo para τ , ya que elijamos la superficie que elijamos podemos llegar de nuevo a este resultado. De este modo, la única opción posible es que el integrando sea nulo, lo que nos lleva a la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (6.20)$$

Que se conoce como ecuación de continuidad, y que al ser una consecuencia directa del principio de conservación de la carga, tiene que cumplirse siempre.

Ahora, tan solo despejando, llegamos la expresión de la divergencia de \vec{J}

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.21)$$

Ahora, siguiendo exactamente el mismo razonamiento que cuando tratamos las componentes normales del campo \vec{D} en temas anteriores, podemos llegar a que en la superficie de separación entre dos medios 1 y 2

$$\left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1 \right) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.22)$$

Que indica que si de una superficie sale más corriente de la que llega, es decir $\hat{n} \cdot \left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1 \right) > 0$, esto significa que la densidad superficial de carga almacenada en esa superficie tiene que disminuir $\left(\frac{\partial \rho_s}{\partial t} < 0 \right)$.

6.2.1. Corrientes estacionarias

Se conoce como corriente estacionaria a aquella que no modifica las densidades de carga

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial \rho_s}{\partial t} = 0 \quad (6.23)$$

Y que por supuesto verifican

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.24)$$

Podemos pensar en una corriente estacionaria como un flujo de carga constante que no cambia a lo largo del tiempo.

6.2.2. Corrientes de polarización

Como ya discutimos en temas anteriores, cuando a un dieléctrico se le somete a un campo externo, este experimenta un proceso conocido como polarización, en el que las cargas ligadas se pueden reubicar. Esto por supuesto conlleva a un desplazamiento de cargas, y a una densidad de corriente de polarización, \vec{J}_p que tendrá que cumplir la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J}_p + \frac{\partial \rho_{pv}}{\partial t} = 0 \quad (6.25)$$

Ahora, como sabemos que $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$, sustituyendo y manipulando la ecuación anterior llegamos a

$$\nabla \cdot \vec{J}_p = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{P}) = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.26)$$

Integrando ambos lados de la ecuación en un volumen τ dentro del dieléctrico y reorganizando términos, obtenemos

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \left(\vec{J}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) dv' = 0 \quad (6.27)$$

Ahora, si S es la superficie frontera de τ , podemos utilizar el teorema de la divergencia

$$\oint_S \left(\vec{J}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}' = 0 \quad (6.28)$$

Y como esto es válido para cualquier superficie S, el integrando ha de ser nulo siempre, por lo que llegamos a

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.29)$$

6.3. Tensor conductividad eléctrica. La ley de Ohm

Como ya sabemos, el campo eléctrico produce el movimiento de cargas, que nosotros modelamos mediante el vector densidad de corriente, \vec{J} . Esta relación causa-efecto nos dice que tiene que existir algún tipo de conexión entre \vec{E} y \vec{J} . El elemento que los relaciona se denomina tensor conductividad eléctrica, σ . La relación entre los dos vectores en medios lineales es la siguiente

$$J_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(\vec{r}) E_j \quad (6.30)$$

O, en forma matricial

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\vec{r}) & \sigma_{12}(\vec{r}) & \sigma_{13}(\vec{r}) \\ \sigma_{21}(\vec{r}) & \sigma_{22}(\vec{r}) & \sigma_{23}(\vec{r}) \\ \sigma_{31}(\vec{r}) & \sigma_{32}(\vec{r}) & \sigma_{33}(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Si además el medio es isótropo, tendremos que la conductividad es una función de la posición

$$\vec{J} = \sigma(\vec{r}) \vec{E} \quad (6.32)$$

Y para medios lineales, homogéneos e isótropos, la conductividad es una constante

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (6.33)$$

Ahora veremos como, para medios l.h.i, esta relación es equivalente a la conocida ley de Ohm, $V = IR$. Para ello, consideremos un fragmento de conductor l.h.i como el que se muestra en la figura.

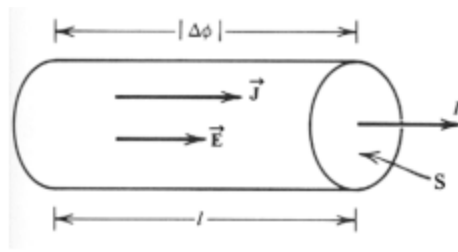


Figura 6.3: Cilindro conductor de longitud l y superficie S sometido a una diferencia de potencial $\Delta\phi$ entre sus extremos, que causa el paso de una intensidad I que consideraremos uniformemente distribuida y perpendicular a la sección del conductor.

En primer lugar, podemos escribir la diferencia de potencial en función del campo eléctrico

$$|\Delta\phi| = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot l \implies |\vec{E}| = \frac{|\Delta\phi|}{l} \quad (6.34)$$

Ahora, recordemos que la intensidad que atraviesa el conductor viene dada por

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = J \cdot S \implies |\vec{J}| = \frac{I}{S} \quad (6.35)$$

Ya que estamos suponiendo que la corriente está uniformemente distribuida. Ahora, usando la relación entre la corriente y el campo eléctrico

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \implies |\vec{J}| = \sigma |\vec{E}| \quad (6.36)$$

Y sustituyendo los valores de los módulos de ambos campos

$$\frac{I}{S} = \frac{|\Delta\phi|}{l} \implies |\Delta\phi| = I \frac{l}{S\sigma} = IR \quad (6.37)$$

Donde a R se la conoce como resistencia del conductor. Es importante darse cuenta de que no es un parámetro característico del mismo, ya que depende de las dimensiones del conductor (a través de las variables l y S). Lo que sí es un parámetro característico es la conductividad σ o su inversa, a la que se la conoce como resistividad y se la denota como ρ

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} \quad (6.38)$$

6.4. Condiciones de frontera. Refracción del campo eléctrico

Ya hemos deducido la condición de frontera para las componentes normales de \vec{J} en la separación entre dos medios

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (6.39)$$

Que, para corrientes estacionarias, se reducen a la conservación de las componentes normales de la densidad de corriente

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6.40)$$

Ahora, si suponemos que estamos ante medios l.h.i, podemos escribir la ecuación anterior como

$$(\sigma_2 \vec{E}_2 - \sigma_1 \vec{E}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad (6.41)$$

Es decir, las componentes normales del campo eléctrico, en general, no se conservan, sino que son proporcionales

$$E_{n2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_{n1} \quad (6.42)$$

Ahora, como $\nabla \times \vec{E} = 0$, las componentes tangenciales del campo eléctrico tienen que conservarse (esto se demostró en temas anteriores).

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (6.43)$$

De esta manera, lo que tenemos es una refracción, como se indica en la siguiente figura

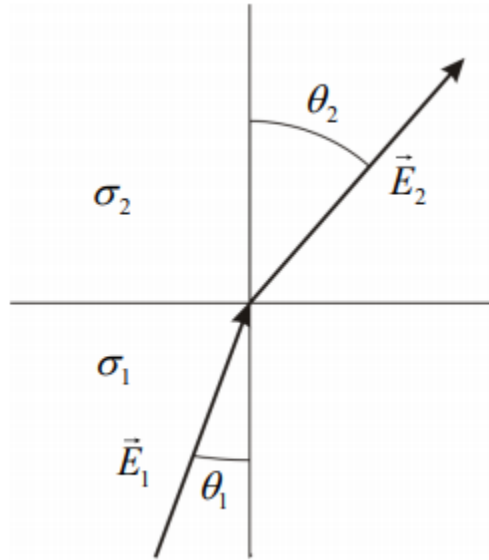


Figura 6.4: Refracción de las líneas de \vec{E} en la separación entre dos medios con distintas conductividades

Los ángulos θ_1 y θ_2 se pueden expresar en función de las componentes normales y tangenciales del campo eléctrico

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{t1}}{E_{n1}} \quad (6.44)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{E_{t12}}{E_{n2}} \quad (6.45)$$

Ahora, usando las relaciones entre componentes normales y tangenciales a las que hemos llegado

$$\tan \theta_1 = \frac{E_t}{E_{n1}} \quad (6.46)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{E_t}{E_{n1}} \quad (6.47)$$

Y juntando las dos expresiones, llegamos a la expresión que gobierna la refracción del campo eléctrico

$$\tan \theta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tan \theta_1 \quad (6.48)$$

6.5. Resistencia y capacidad

En esta sección veremos una manera de relacionar estas dos magnitudes, que ya han aparecido anteriormente. Para ello, consideremos el condensador de la figura

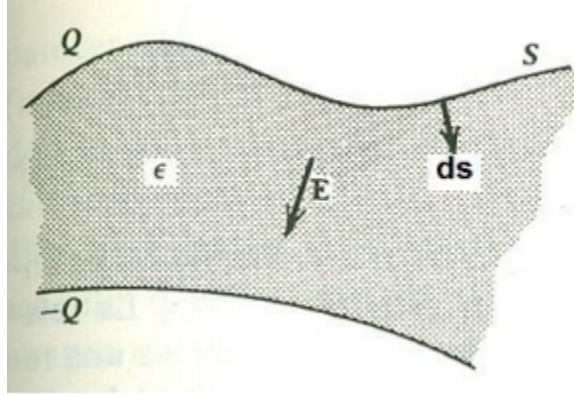


Figura 6.5: Condensador l.h.i de permitividad ϵ y conductividad σ , en el que estamos manteniendo una diferencia de potencial constante entre sus placas

Vamos a calcular varios parámetros de este condensador, y acabaremos llegando a una relación entre su resistencia y su capacidad. Empezaremos calculando la diferencia de potencial entre placas, que viene dado por

$$\Delta\phi = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (6.49)$$

Donde C es un camino cualquiera que va de una placa a la otra. Por otro lado, la carga Q almacenada en cada placa será

$$Q = \oint_S \rho_s ds = \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = \epsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (6.50)$$

Donde hemos usado la expresión 3.6 para relacionar la densidad de carga con el campo eléctrico en la superficie de un conductor. Ahora que ya tenemos la carga y la diferencia de potencial, es sencillo calcular la capacidad

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{\epsilon \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (6.51)$$

También podemos calcular la intensidad que circula por el conductor

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (6.52)$$

Y utilizando la ley de Ohm, hallar la resistencia

$$R = \frac{\Delta\phi}{I} = \frac{\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}}{\sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} \quad (6.53)$$

Ahora, si multiplicamos la resistencia y la capacidad, llegamos a

$$RC = \frac{Q}{I} = \frac{\epsilon}{\sigma} \quad (6.54)$$

6.6. Transición hacia el equilibrio electrostático

Supongamos que tenemos un volumen conductor en el que existe una densidad de carga ρ_v , y que no está en equilibrio electrostático. Evidentemente, el sistema evolucionará hasta alcanzar dicho equilibrio, y su evolución viene dada por la ecuación de continuidad.

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.55)$$

Si ahora pensamos en medios l.h.i, podemos escribir esta ecuación como

$$\sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.56)$$

O, en función de la densidad de carga

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (6.57)$$

Es sencillo resolver esta ecuación diferencial y llegar a la dependencia temporal de ρ_v

$$\rho_v(t) = \rho_0 e^{-\tau t} \quad (6.58)$$

Donde

$$\tau \equiv \frac{\epsilon}{\sigma} = RC \quad (6.59)$$

Se llama tiempo de relajación, y es un parámetro característico de cada material.

6.7. Circuitos eléctricos

Para introducir esta sección, volvamos por un momento al caso de la figura 6.5, y preguntémosnos lo que pasaría si dejamos que este sistema evolucione. Claramente, al cabo de un cierto tiempo se alcanzará el equilibrio electrostático, ya que al fluir carga de una placa a otra se reduce la diferencia de potencial, y cuando esta llegue a cero, el campo eléctrico desaparecerá en el interior del condensador. Para mantener esa situación sería necesaria una fuente externa de energía que transporte carga de una placa a otra, de modo que en cada una siempre exista una carga total Q o $-Q$.

Esta es la idea de un circuito eléctrico. Un conductor a través del cual se puede mover la carga (y por lo tanto se genera una corriente), gracias a que una fuente externa está manteniendo una diferencia de potencial constante entre los extremos del circuito.

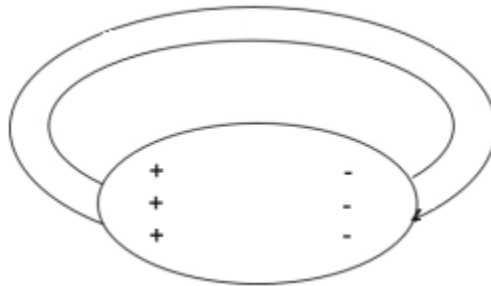


Figura 6.6: Las baterías (región ovalada), mantienen una diferencia de potencial constante

Pensemos por un momento como serán los campos eléctricos tanto en la región conductora como en las baterías. Ya hemos visto muchas veces que el campo irá de las cargas positivas a las negativas, como se ve a continuación

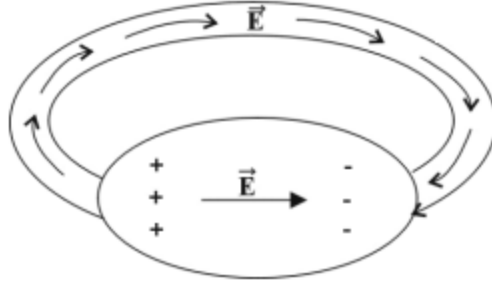
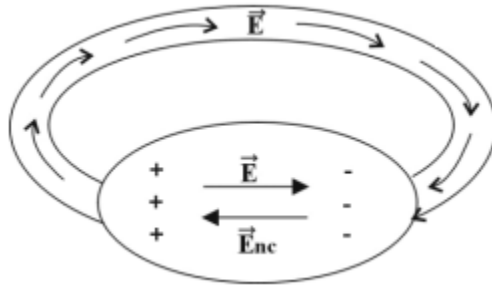


Figura 6.7: Líneas del campo electrostático

Pero esta distribución de campos presenta un claro problema. Pensemos por un momento en el trayecto de una carga (que consideraremos positiva por simplicidad) desde el lado positivo hasta el negativo. Empezará circulando por el cable hasta que llegue a la zona negativa, pero una vez ahí, no hay manera de que llegue de nuevo a la placa positiva (ya que tendría que ir en contra del campo). Es aquí donde entran las baterías, que crean un campo eléctrico que va desde las cargas negativas a las positivas y que es mucho más intenso que el campo electrostático en esa región. Es este campo el responsable de mantener constante la diferencia de potencial entre los extremos del circuito

Figura 6.8: Las baterías mantienen el campo \vec{E}_{nc} , que transporta carga del lado negativo al positivo y evita que se alcance el equilibrio

Estudiemos por un momento la naturaleza del campo \vec{E}_{nc} . Para ello, sea Γ un camino cerrado que recorre la región conductora desde el lado positivo hasta el negativo (a favor de \vec{E}) y la región de las baterías desde el lado negativo hasta el positivo (en contra de \vec{E}). Ahora, definimos la fuerza electromotriz, ε , como el trabajo realizado por el campo eléctrico por unidad de carga a lo largo de esta trayectoria cerrada

$$\varepsilon \equiv \frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{r} \quad (6.60)$$

Ahora podemos escribir esta integral en términos de los campos \vec{E} y \vec{E}_{nc}

$$\varepsilon = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} \quad (6.61)$$

Que se puede escribir en función de la diferencia de potencial entre los extremos del circuito

$$\varepsilon = \Delta\phi - \Delta\phi + \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} = \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} \quad (6.62)$$

Y hemos llegado a la siguiente conclusión

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{r} = \int_{-}^{+} \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{r} \quad (6.63)$$

Que debería resultar chocante, ya que esto implica que $\nabla \times \vec{E}_{tot} \neq 0$. Esto se debe a que el campo generado por las baterías no es conservativo². En una trayectoria cerrada, este campo es el único que realiza trabajo sobre las cargas. De aquí en adelante no consideraremos este campo no conservativo, ya que trabajaremos siempre en las regiones conductoras, y no en la zona de las baterías.

6.7.1. Relaciones energéticas. La ley de Joule

Ahora vamos a hacer el balance energético de nuestro circuito. Ya sabemos que la corriente que existe en la región conductora es mantenida por fuentes externas, generalmente baterías, por lo que estamos en una situación en la que a nuestro circuito le estamos bombeando energía desde el exterior. Si queremos mantener una corriente constante en el tiempo (o lo que es lo mismo, que no se acumule energía en el circuito), tendremos que exigir que toda la energía aportada por las baterías se disipe en forma de calor. De nuevo, vamos a considerar una porción diferencial de nuestro circuito

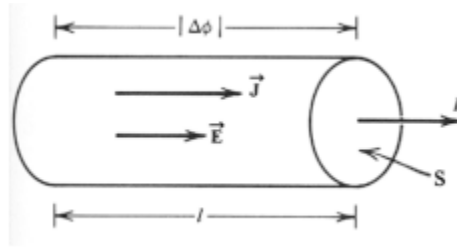


Figura 6.9: Sección diferencial de un conductor l.h.i

El trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga q será

$$W = -q\Delta\phi \quad (6.64)$$

Si ahora tomamos la variación temporal de este trabajo

$$\frac{dW}{dt} \equiv \dot{W} = -\frac{d}{dt}(q\Delta\phi) = -\frac{dq}{dt}\Delta\phi - q\frac{d\Delta\phi}{dt} \quad (6.65)$$

Ahora, si tenemos en cuenta que las baterías mantienen constante la diferencia de potencial

$$\dot{W} = -\frac{dq}{dt}\Delta\phi = -I\Delta\phi \quad (6.66)$$

Si ahora pensamos en la energía por unidad de tiempo y volumen

$$\frac{\dot{W}}{\Delta l \Delta S} \equiv w = -\frac{I}{\Delta S} \frac{\Delta\phi}{\Delta l} \quad (6.67)$$

Ahora podemos relacionar la densidad de corriente con el cociente entre intensidad y superficie

$$w = -J \frac{\Delta\phi}{\Delta l} \quad (6.68)$$

²Aunque ahora esto pueda parecer extraño, cuando introduzcamos campos magnéticos variables en el tiempo se verá que $\nabla \times \vec{E} = 0$ no es el caso general.

Si ahora hacemos tender a cero el volumen de nuestra región

$$w = -J \frac{d\phi}{dl} = JE \quad (6.69)$$

Donde hemos usado el hecho de que, en la región conductora, el campo eléctrico es conservativo. Ahora, en medios l.h.i, los campos \vec{E} y \vec{J} son paralelos, así que podemos escribir³

$$w = \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (6.70)$$

Y por lo tanto, si llamamos τ a todo el volumen conductor, la energía total disipada en forma de calor será

$$\dot{W} = \int_{\tau} (\vec{J} \cdot \vec{E}) dv \quad (6.71)$$

Vamos a trabajar algo con esta ecuación para transformarla en una expresión más conocida. En primer lugar, para medios l.h.i, podemos escribir

$$w = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{I^2}{S^2 \sigma} \quad (6.72)$$

Dividiendo y multiplicando por la longitud l

$$w = \left(\frac{l}{S\sigma} \right) \frac{I^2}{Sl} \quad (6.73)$$

El término entre paréntesis es exactamente la definición de resistencia a la que llegamos en apartados anteriores

$$w = \frac{RI^2}{Sl} \quad (6.74)$$

Y como Sl es el volumen de nuestra sección infinitesimal

$$\dot{W} = wSl = RI^2 \quad (6.75)$$

Finalmente, utilizando la ley de Ohm, esto es equivalente a

$$\dot{W} = \frac{(\Delta\phi)^2}{R} \quad (6.76)$$

Que es la expresión de la ley de Joule. Finalmente, y como expresión necesaria para el apartado siguiente, veamos una manera alternativa de escribir la potencia disipada

$$\dot{W} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = \varepsilon I \quad (6.77)$$

6.7.2. Leyes de Kirchhoff

Las leyes de Kirchhoff son dos ecuaciones realmente útiles para resolver circuitos, y se las conoce como ley de los nudos y ley de las mallas.

Ley de los nudos: Un nudo es todo aquel punto de un circuito en el que converjan tres o más conductores. La ley de Kirchhoff de los nudos establece que la suma total de las intensidades que entran en un nudo es nula

$$\sum_i I_i = 0 \quad (6.78)$$

³Esta ecuación podría no parecer general, pero de nuevo, la demostraremos más rigurosamente más adelante

Para demostrar esto, utilizaremos el hecho de que estamos trabajando con corrientes estacionarias

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.79)$$

Veamos ahora un modelo de nudo

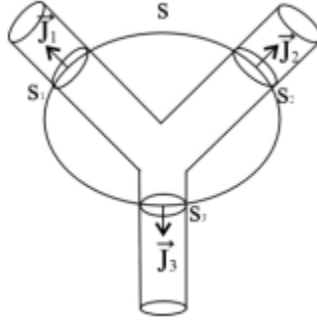


Figura 6.10: Ejemplo de un nudo en el que convergen 3 conductores

Si τ es el volumen contenido en el interior de S , tenemos que

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \vec{J} dv = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (6.80)$$

Ahora, según la figura, $\vec{J} = 0$ excepto en las zonas en las que la superficie S corta a los conductores. Si ahora tenemos un nudo en el que convergen N conductores, tendremos que

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{J}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_{i=1}^N I_i = 0 \quad (6.81)$$

Llegando así a la expresión de la ley de los nudos.

Ley de las mallas: Una malla es cualquier camino cerrado dentro de un circuito. La ley de Kirchhoff para las mallas es la siguiente

$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_i R_i I_i \quad (6.82)$$

Para demostrarla, sea una malla cualquiera caracterizada por el camino cerrado Γ . Consideremos la siguiente integral

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (6.83)$$

A la hora de calcular esta integral tenemos que tener en cuenta que es posible que el camino γ atravesase regiones donde existe campo no conservativo. Ya hemos visto que esta integral equivale a la integral del campo no conservativo en las regiones dentro de las baterías

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc, i} \cdot d\vec{r} \quad (6.84)$$

Considerando que existen N baterías en esta malla, y donde los γ_i son las partes de Γ interiores a las baterías. Por otro lado, podemos expandir la integral inicial en varios sumandos

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{Regiones conductoras}} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\text{Baterías}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc, i} \cdot d\vec{r} \quad (6.85)$$

En primer lugar, si la malla tiene M elementos de resistencias R_i , la integral sobre las regiones conductoras será

$$\int_{\substack{\text{Regiones} \\ \text{conductoras}}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^M \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^M V_i = \sum_{i=1}^M I_i R_i \quad (6.86)$$

Y la integral en las baterías se puede separar en la integral del campo conservativo y la del campo no conservativo

$$\int_{\text{Bat}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^N \int \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (6.87)$$

Combinando las tres últimas ecuaciones, llegamos a que

$$\sum_{i=1}^M I_i R_i + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \vec{E}_{nc,i} \cdot d\vec{r} \quad (6.88)$$

Y cancelando términos, llegamos a la ley de las mallas

$$\sum_{i=1}^M I_i R_i + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i = 0 \quad (6.89)$$

Parte II

Electromagnetismo II

Capítulo 7

Magnetostática en el vacío

En temas anteriores hemos visto que las cargas estáticas generan un campo eléctrico (formalmente, la densidad volúmica de carga es la fuente escalar del campo electrostático). Ahora, es un hecho experimental que las cargas en movimiento generan un campo con efectos totalmente distintos al campo electrostático, al que nos referimos como campo magnético y que denotamos como \vec{B} .

7.1. Postulados en el espacio libre

Al igual que hicimos con el campo eléctrico, comenzaremos postulando la divergencia y el rotacional del campo magnético en el vacío

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \quad (7.1)$$

Donde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ es la permeabilidad magnética del espacio libre.

Desde un primer momento vemos que este campo es totalmente distinto al campo eléctrico, no solo en lo que son sus fuentes, sino en la naturaleza de las mismas. Mientras que el campo eléctrico tiene solo fuentes escalares, y no vectoriales, el campo magnético es completamente opuesto, ya que tan solo tiene fuentes vectoriales.

Antes de empezar a discutir las ecuaciones que nos permiten obtener el campo magnético, prestemos atención por un momento a los postulados, y especialmente al hecho de que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Esto nos indica que las líneas de campo de \vec{B} serán siempre cerradas¹

7.2. Funciones de potencial del campo magnético

Los postulados de la magnetostática en el espacio libre nos especifican el valor de la divergencia y del rotacional de \vec{B} , por lo que según el teorema de Helmholtz seremos capaces de conocer el campo magnético en todo punto. Aplicando las expresiones 1.14 y 1.15, podemos calcular las siguientes funciones

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{(\nabla \cdot \vec{B}) dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \quad (7.2)$$

¹Existen ciertas configuraciones que dan lugar a campos magnéticos con líneas no cerradas, pero siempre incluyen geometrías infinitas. En el caso de distribuciones de corriente finitas, las líneas serán siempre cerradas.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{(\nabla \times \vec{B}) dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.3)$$

Y podemos obtener el campo magnético como

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (7.4)$$

Donde a la función \vec{A} se la conoce como potencial vector

7.3. La ley de Lorentz

Experimentalmente, se ha comprobado que si una partícula cargada con una carga q se mueve con una velocidad \vec{v} en una región donde existe un campo magnético \vec{B} , esta experimenta una fuerza dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.5)$$

Expresión conocida como ley de Lorentz. Si en esa región existe también un campo eléctrico \vec{E} , la fuerza total ejercida sobre la carga q será

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.6)$$

7.3.1. Trabajo realizado por el campo magnético

Supongamos una región del espacio donde existe un campo magnético \vec{B} que es atravesada por una carga puntual q moviéndose a con una velocidad \vec{v} a lo largo de un determinado camino Γ . El trabajo realizado por el campo magnético será

$$W_m = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7.7)$$

Sin embargo, conocemos la expresión de la fuerza, ya que viene dada por la ley de Lorentz

$$W_m = \int_{\Gamma} (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (7.8)$$

Ahora, el vector velocidad \vec{v} es paralelo a $d\vec{r}$ en todo momento. Por otro lado, el producto $\vec{v} \times \vec{B}$ es perpendicular a \vec{v} por las propiedades del producto vectorial. De este modo, podemos afirmar que $\vec{v} \times \vec{B} \perp d\vec{r}$ en todo momento. Ahora, como el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo

$$W_m = 0 \quad (7.9)$$

Es decir, el campo magnético nunca realiza trabajo. De este modo, sabemos que será imposible alterar el módulo de la velocidad de una partícula empleando tan solo campos magnéticos (ya que $W = \Delta E_c$, la variación de energía cinética). Si que es posible, sin embargo, emplear un campo magnético para alterar la trayectoria de una partícula.

7.3.2. Trabajo electromagnético

Ahora vamos a considerar el caso en el que no solo existe un campo magnético, sino que también tenemos un campo eléctrico. En este caso, el trabajo vendrá dado por

$$W = \int_{\Gamma} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (7.10)$$

De lo que se deduce

$$dW = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (7.11)$$

Ahora, utilizando que $d\vec{r} = \vec{v}dt$, podemos reescribir esto como

$$dW = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v}dt \quad (7.12)$$

Ahora, siguiendo los mismos argumentos que en el apartado anterior, podemos asegurar que

$$\left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v}dt = 0 \quad (7.13)$$

Y por lo tanto tendremos

$$dW = q\vec{E} \cdot \vec{v}dt \quad (7.14)$$

Podemos reorganizar términos para llegar a

$$\frac{dW}{dt} \equiv d\dot{W} = \vec{E} \cdot (q\vec{v}) \quad (7.15)$$

Y ahora, recordando que $q\vec{v} = \vec{J}$, tendremos que

$$d\dot{W} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (7.16)$$

Y por lo tanto, la potencia total será

$$\dot{W} = \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} \quad (7.17)$$

Donde τ es todo el volumen donde existen las corrientes y los campos eléctricos².

7.4. Ley de Biot-Savart

Partamos de la expresión del potencial vector dada por el teorema de Helmholtz

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7.18)$$

Podemos obtener el campo magnético aplicando el rotacional

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\int_{\tau} \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (7.19)$$

Ahora, para funciones lo suficientemente bien comportadas, podemos introducir el rotacional en la integral

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla \times \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (7.20)$$

Ahora, haremos uso de la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (f\vec{G}) = f\nabla \times \vec{G} + \nabla f \times \vec{G} \quad (7.21)$$

Si ahora $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ y $\vec{G} = \vec{J}(\vec{r}') dv'$, tendremos que

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla \times \left(\vec{J}(\vec{r}') dv' \right) + \nabla \times \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (7.22)$$

²Esta es de nuevo la expresión de la ley de Joule, pero demostrada más formalmente

Ahora, como las coordenadas primadas y sin primar son independientes, y nuestro rotacional actúa sobre las coordenadas sin primar, el primer término de la integral es nulo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla \times \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (7.23)$$

Es sencillo calcular el rotacional, lo que nos deja con

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} - \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (7.24)$$

Y si ahora definimos el siguiente vector

$$\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' \quad (7.25)$$

Podemos expresar el campo magnético como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{R}}{R^2} dv' \quad (7.26)$$

Expresión que se conoce como ley de Biot-Savart.

7.4.1. Corrientes superficiales y filamentosales

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso de corrientes tridimensionales, se puede deducir la expresión de la ley de Biot-Savart para corrientes superficiales

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{R}}{R^2} ds' \quad (7.27)$$

Y para corrientes filamentosales

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{I(\vec{r}') d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2} \quad (7.28)$$

7.5. Ley de Ampère

Vamos a considerar el segundo postulado de la magnetostática en el vacío

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (7.29)$$

Ahora, si integramos ambos miembros en una superficie abierta S

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.30)$$

Ahora, utilizando el teorema del rotacional en el primer miembro

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.31)$$

Donde C es el contorno donde se apoya la superficie S. Ahora, podemos identificar la integral del segundo miembro con la intensidad encerrada dentro del contorno C, para llegar a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc} \quad (7.32)$$

Expresión conocida como la ley de Ampère, y que es de gran utilidad para calcular campos magnéticos aprovechando simetrías, como veremos a continuación.

7.5.1. Ejemplo: Campo generado por un cilindro

Consideremos la siguiente situación

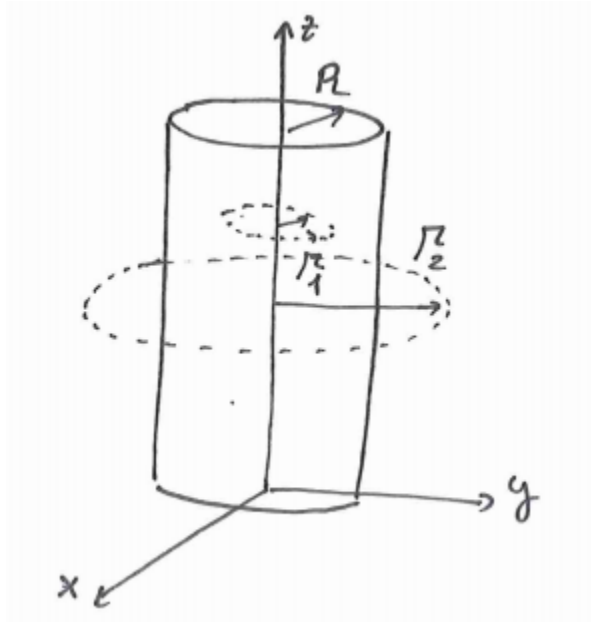


Figura 7.1: Cilindro infinito de radio R por el que circula una intensidad I . Se indican también los caminos cerrados Γ_1 y Γ_2 , que serán útiles más adelante.

En primer lugar, veamos lo que significa que por el cilindro circule una intensidad I . Si S es una superficie perpendicular al eje del cilindro, y \vec{J} la densidad volumétrica de corriente en el cilindro, tendremos que

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.33)$$

Ahora, como $\vec{J} \parallel d\vec{s}$, y $J = cte$, tendremos que

$$I = \pi R^2 J \quad (7.34)$$

Y por lo tanto el vector densidad de corriente será

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{z} \quad (7.35)$$

Ahora vamos a estudiar la forma del campo magnético. Nuestro problema tiene una simetría cilíndrica, ya que trasladarnos en las coordenadas z y φ no cambia nuestra visión del cilindro. De esta manera, podemos deducir que

$$|\vec{B}| = |\vec{B}|(\rho) \quad (7.36)$$

Por otro lado, según la regla de la mano derecha, el campo magnético llevará dirección $\hat{\varphi}$, y por lo tanto

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\varphi} \quad (7.37)$$

Campo en el interior del cilindro:

Consideremos un camino cerrado circular Γ_1 , como se indica en la figura, de radio $r < R$, y planteemos la ley de Ampère para este camino

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.38)$$

Donde S_1 es la superficie delimitada por Γ_1 . Ahora, como a lo largo de Γ_1 el módulo del campo magnético es constante, y además este es paralelo a $d\vec{r}$, tendremos que

$$B(r) \oint_{\Gamma_1} dr = 2\pi r B(r) = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (7.39)$$

Ahora, podemos evaluar la integral de superficie

$$2\pi r B(r) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \int_{S_1} ds = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} \pi r^2 \quad (7.40)$$

Y reorganizando términos llegamos a una expresión para el módulo del campo magnético en el interior del cilindro

$$B_{int}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (7.41)$$

Y, en forma vectorial

$$\vec{B}_{int}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \hat{\varphi} \quad (7.42)$$

Campo en el exterior del cilindro:

Consideremos ahora el camino Γ_2 , que ahora es de radio $r > R$, y apliquemos la ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc} \quad (7.43)$$

Ahora, I_{enc} es simplemente I , ya que el camino Γ_2 encierra a todo el cilindro. Usando además que el campo magnético sobre este camino es constante y paralelo a $d\vec{r}$, podemos llegar a

$$B(r) \oint_{\Gamma_2} dr = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad (7.44)$$

Reorganizando términos

$$B_{ext}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7.45)$$

Y en forma vectorial

$$\vec{B}_{ext}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (7.46)$$

Y por lo tanto, el campo generado por un cilindro infinito en todo el espacio vendrá dado por

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \hat{\varphi} & \text{Si } r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi} & \text{Si } r > R \end{cases} \quad (7.47)$$

7.5.2. Ejemplo: Campo generado por un solenoide ideal infinito

Consideremos un hilo conductor por el que circula una intensidad I , enrollado formando una bobina circular de radio R , indefinida a lo largo del eje z , como se indica en la figura

Figura 7.2: Solenoide infinito por el que circula una intensidad I

La condición de solenoide ideal viene dada por suponer que las espiras forman un ángulo nulo con el plano XY , o lo que es lo mismo, que son todas ellas perpendiculares al eje OZ . Además, llamaremos n a la densidad de espiras del solenoide, el número de espiras por unidad de longitud.

Vamos a identificar las simetrías de nuestro problema para describir cualitativamente los campos. En primer lugar, tenemos una simetría cilíndrica, ya que desplazarse en las coordenadas z o φ no cambia nuestra visión del problema. De esta manera, el campo magnético, tanto en el interior del solenoide como en el exterior, será de la forma

$$B = B(\rho) \quad (7.48)$$

Por otro lado, la regla de la mano derecha nos indica que el campo magnético tendrá que ser paralelo al eje z tanto para el campo interno como para el externo. Así pues

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{z} \quad (7.49)$$

Consideremos entonces el camino cerrado Γ_1 que se muestra en la figura, y apliquemos la ley de Ampère

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc} \quad (7.50)$$

La intensidad encerrada es sencilla de calcular. Como n son las vueltas por unidad de longitud, el bobinado atravesará la superficie delimitada por Γ_1 $n \cdot a$ veces, y por lo tanto la intensidad encerrada será

$$I_{enc} = Ina \quad (7.51)$$

En cuando a la circulación de \vec{B} , esta será nula en los tramos horizontales (ya que $\vec{B} \perp d\vec{r}$). De esta manera, tendremos que

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^a \vec{B}_{int} \cdot d\vec{r} + \int_0^a \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{r} \quad (7.52)$$

Ahora, en los dos tramos que quedan, $\rho = cte$, por lo que los campos también lo serán. Así pues

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = a(B_{int} + B_{ext}) \quad (7.53)$$

Y sustituyendo en la ley de Ampère llegamos a

$$B_{int} + B_{ext} = \mu_0 In \quad (7.54)$$

Nos falta entonces una relación adicional entre el campo externo y el interno. Para ello, consideremos el camino Γ_2 , con una altura a igual a la altura de Γ_1 , pero mucho más largo, tanto que en el extremo vertical exterior al solenoide el campo \vec{B} es nulo. Este camino Γ_2 tiene el mismo valor para I_{enc} que Γ_1 , pero la circulación de \vec{B} a lo largo de este camino será

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = aB_{int} \quad (7.55)$$

Y por lo tanto, utilizando la ley de Ampère, llegamos a

$$B_{int} = \mu_0 In \quad (7.56)$$

Combinando las ecuaciones que resultan de aplicar la ley de Ampère a ambos circuitos, obtenemos que

$$B_{int} = \mu_0 In \quad (7.57)$$

$$B_{ext} = 0 \quad (7.58)$$

Nótese que en ningún momento especificamos la posición exacta del tramo interior de los caminos, así que el resultado general aplicará a todos los puntos interiores del solenoide. Así pues, el campo generado por un solenoide ideal infinito será

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 In \hat{z} & \text{Si } \rho < R \\ 0 & \text{Si } \rho > R \end{cases} \quad (7.59)$$

Como apunte, cabe destacar que este resultado es cierto para solenoides ideales infinitos de sección arbitraria, no solo circular³

³referencia

7.5.3. Ejemplo: Campo generado por un toroide

Vamos a considerar un toroide hueco en el que se enrolla un hilo conductor por el que circula una intensidad I , como se indica en la figura.

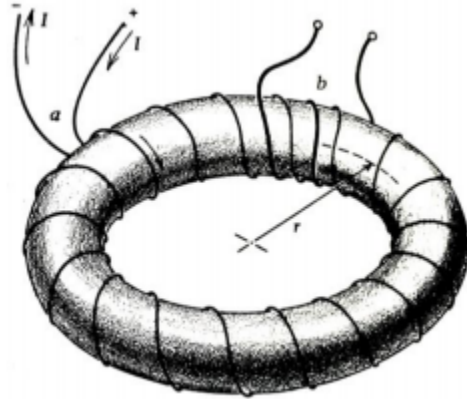


Figura 7.3: Toroide con un hilo conductor enrollado, que tiene un número de vueltas N . El radio medio del toroide es R

Este problema no tiene las mismas propiedades de simetría que los anteriores, por lo que la expresión general del campo magnético será, en coordenadas cilíndricas

$$\vec{B} = B_\rho \hat{\rho} + B_\varphi \hat{\varphi} + B_z \hat{z} \quad (7.60)$$

Si que podemos hablar de una cierta simetría, y es que si nos situamos en el plano que divide horizontalmente al toroide en dos mitades iguales, podemos asegurar que contamos con simetría en la coordenada φ , por lo que

$$B_\varphi = B_\varphi(\rho) \quad (7.61)$$

En este plano central, podemos decir entonces que, para cualquier trayectoria circular γ

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{r} = B_\varphi \oint_\gamma dr = 2\pi\rho B_\varphi \quad (7.62)$$

Consideremos entonces la vista superior del toroide y los siguientes caminos de integración

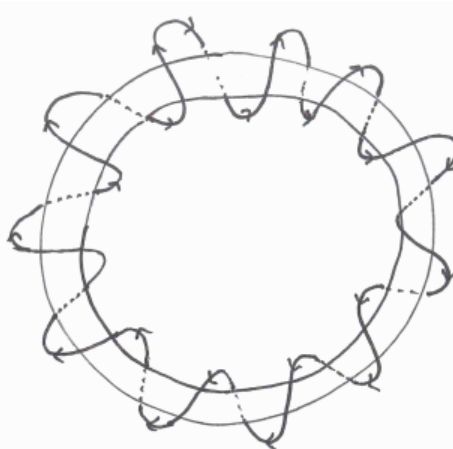


Figura 7.4: Vista superior del toroide y del hilo conductor

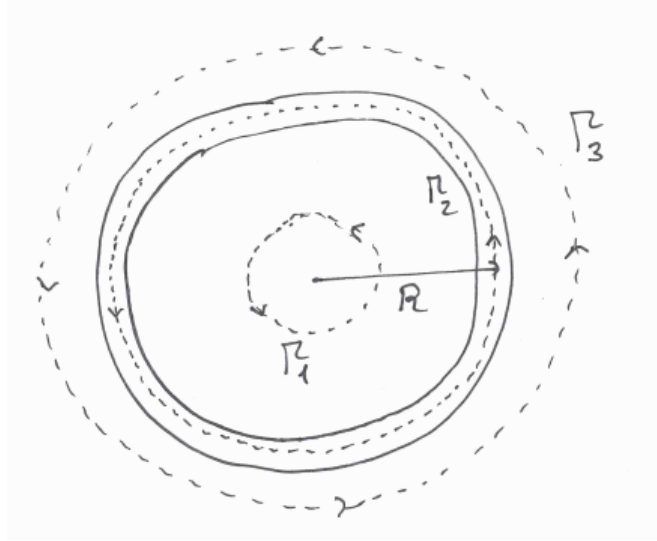


Figura 7.5: Caminos de integración para la aplicación de la ley de Ampère.

Caminos Γ_1 y Γ_3 :

En estos dos caminos, el argumento es simple, y es que la intensidad encerrada en ambos es nula. En el caso de Γ_1 , es sencillo ver que no existen corrientes en su interior. Por otro lado, en Γ_3 , cada vez que el hilo conductor atraviesa la superficie interior a este camino en una dirección (abajo-arriba o arriba-abajo), también lo hará en la otra, y como la intensidad en el hilo es siempre la misma, la intensidad encerrada es nula. Aplicando la ley de Ampère a cualquiera de estos dos caminos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc} = 0 \quad (7.63)$$

Que en nuestro plano de interés se reduce a

$$2\pi\rho B_\varphi = 0 \implies B_\varphi = 0 \quad (7.64)$$

Camino Γ_2 :

Empecemos hablando de la intensidad encerrada. Como se puede ver en las figuras anteriores, esta tendrá que ser

$$I_{enc} = NI \quad (7.65)$$

Ya que en hilo solo atraviesa la superficie limitada por el camino en una dirección (arriba-abajo o abajo-arriba). La aplicación de la ley de Ampère nos lleva a que

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 NI \quad (7.66)$$

Que, en nuestro plano de interés se reduce a

$$2\pi B_\varphi \rho = \mu_0 NI \implies B_\varphi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi\rho} \quad (7.67)$$

Ahora, para toroides lo suficientemente estrechos, podemos aproximar que $\rho \approx R$ en todo punto interior del cilindro. Además, si asumimos que la dependencia en z es débil (algo factible si pensamos en un toroide estrecho, tendremos que

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \quad (7.68)$$

Componentes en z y ρ :

La simetría del problema no nos permite calcular cómodamente estas componentes utilizando la ley de Ampère, ya que no es posible encontrar lazos amperianos adecuados. Sin embargo, si que haremos un comentario. Consideremos un corte del toroide como se muestra en la figura

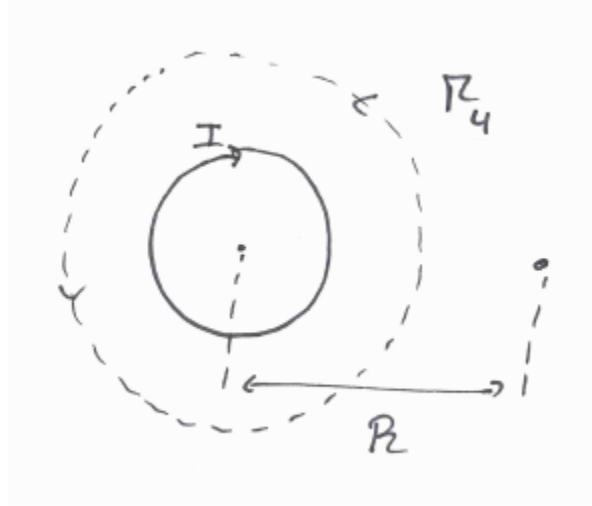


Figura 7.6: Corte del toroide y camino de integración Γ_4 . El camino se ha elegido de manera que el hilo conductor atraviesa la superficie contenida en el mismo una sola vez.

Apliquemos la ley de Ampère a este último camino de integración

$$\oint_{\Gamma_4} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{enc} = \mu_0 I \quad (7.69)$$

Ahora, en este camino, $d\vec{r} \perp \hat{\varphi}$, por lo que tendremos que

$$\oint_{\Gamma_4} (B_z dz + B_\rho d\rho) = \mu_0 I \quad (7.70)$$

Donde hemos sustituido \vec{B} por la expresión 7.60 y hemos realizado los productos escalares adecuados. Si ahora comparamos esta integral con 7.66, vemos que mientras la integral para B_φ es proporcional a IN , esta integral es proporcional a I , por lo que podemos decir que

$$B_z \sim \frac{B_\varphi}{N} \quad (7.71)$$

$$B_\rho \sim \frac{B_\varphi}{N} \quad (7.72)$$

Es decir, que a mayor número de vueltas, las componentes del campo con dirección no angular se vuelven despreciables.

7.6. Ley de fuerzas de Ampère

Para una carga infinitesimal dq que se mueve con velocidad \vec{V} en presencia de un campo magnético \vec{B} , la fuerza que experimenta vendrá dada por la ley de Lorentz

$$d\vec{F} = dq (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (7.73)$$

Ahora vamos a pensar en un conductor filamental, y veamos adonde nos lleva. En primer lugar, podemos hacer la sustitución $dq = \rho_l dl$

$$d\vec{F} = (\vec{V} \times \vec{B}) \rho_l dl \quad (7.74)$$

Si ahora queremos encontrar la fuerza total sobre el conductor, no habrá más que integrar esta expresión a lo largo de todo el conductor. A esta trayectoria la llamaremos C . De esta manera

$$\vec{F} = \int_C \rho_l (\vec{V} \times \vec{B}) dl \quad (7.75)$$

Ahora vamos a querer relacionar la densidad lineal de carga con la intensidad que circula por nuestro conductor filamental. Para ello, consideremos la siguiente figura



Figura 7.7: Modelo de conductor filamental

En un segmento de cable de longitud $V\Delta t$ está almacenada una carga Δq , que vendrá dada por

$$\Delta q = \rho_l V \Delta t \quad (7.76)$$

Reorganizando términos llegamos a

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_l V \quad (7.77)$$

Y llevando la situación al límite cuando $t \rightarrow 0$

$$\frac{dq}{dt} \equiv I = \rho_l V \quad (7.78)$$

Que en forma vectorial es

$$\vec{I} = \rho_l \vec{V} \quad (7.79)$$

Ahora, volviendo a la expresión de la fuerza, podemos utilizar esta igualdad para escribirla como función de la intensidad

$$\vec{F} = \int_C (\vec{I} \times \vec{B}) dl \quad (7.80)$$

Ahora, como $\vec{I} \parallel d\vec{l}$, podemos expresar la fuerza como

$$\vec{F} = \int_C I (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (7.81)$$

Y si suponemos que la intensidad que circula por nuestro conductor es constante

$$\vec{F} = I \int_C (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (7.82)$$

Y concretamente, para un circuito cerrado tendremos

$$\vec{F} = I \oint_C (d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (7.83)$$

Pensemos ahora en dos circuitos cerrados, caracterizados por los caminos C_1 y C_2 , y por los que circulan intensidades constantes I_1 e I_2 . Por supuesto, cada uno de estos circuitos generará un campo magnético, a los que nos referiremos como \vec{B}_1 y \vec{B}_2 .

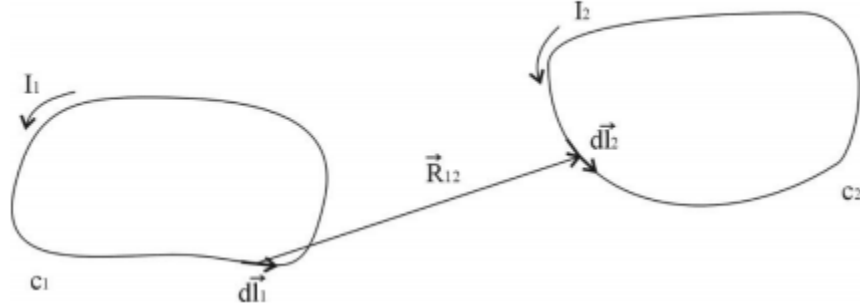


Figura 7.8: Esquema de dos circuitos arbitrarios

Si ahora nos preguntamos por la fuerza que el circuito 2 ejerce sobre el circuito 1, esta vendrá dada por

$$\vec{F}_{21} = I_1 \oint_{C_1} (d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2) \quad (7.84)$$

Por otro lado, el campo \vec{B}_2 vendrá dado por la ley de Biot-Savart

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21}}{R_{21}^2} \quad (7.85)$$

Juntando estas dos ecuaciones

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} d\vec{l}_1 \times \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21}}{R_{21}^2} \quad (7.86)$$

Y como $d\vec{l}_1$ es independiente de C_2 , podemos reorganizar las integrales

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21})}{R_{21}^2} \quad (7.87)$$

Y por supuesto, si queremos la fuerza que el circuito 1 ejerce sobre el circuito 2, no habrá más que intercambiar todos los índices

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{R}_{12})}{R_{12}^2} \quad (7.88)$$

Estas dos últimas ecuaciones son lo que se conoce como la ley de fuerzas de Ampère.

Ahora vamos a manipular la siguiente expresión

$$d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21}) \quad (7.89)$$

Utilizando que $\hat{R}_{21} = -\hat{R}_{12}$, podemos escribir

$$d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21}) = d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times -\hat{R}_{12}) = d\vec{l}_1 \times (\hat{R}_{12} \times d\vec{l}_2) \quad (7.90)$$

Ahora, usando que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B})$ llegamos a

$$d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \hat{R}_{21}) = -d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{R}_{12}) \quad (7.91)$$

Y por lo tanto podemos asegurar que

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (7.92)$$

Que no es más que la expresión de la tercera ley de Newton

7.7. Partículas en campos magnéticos uniformes

Consideremos una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme \vec{B} , y en la que se encuentra una partícula de carga q que se mueve con una velocidad \vec{v} . Según la ley de Lorentz, la fuerza que experimentará la partícula vendrá dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.93)$$

Ahora, vamos a descomponer el vector velocidad en dos componentes

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (7.94)$$

Que satisfacen las siguientes propiedades

$$\vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B} \quad (7.95)$$

$$\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B} \quad (7.96)$$

Sustituyendo en la ley de Lorentz, tenemos que

$$\vec{F} = q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} = q\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B} + q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (7.97)$$

Y como el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo

$$\vec{F} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (7.98)$$

Encontramos entonces que la fuerza magnética solo le afecta a la componente de la velocidad perpendicular al campo, mientras que la otra permanece inalterada. En cuanto al sentido de la fuerza, esta es perpendicular tanto a \vec{v}_{\perp} como a \vec{B} (y por lo tanto es perpendicular a \vec{v}_{\parallel} también). En la siguiente figura se puede ver el movimiento de la partícula en los planos perpendiculares a \vec{v}_{\parallel}

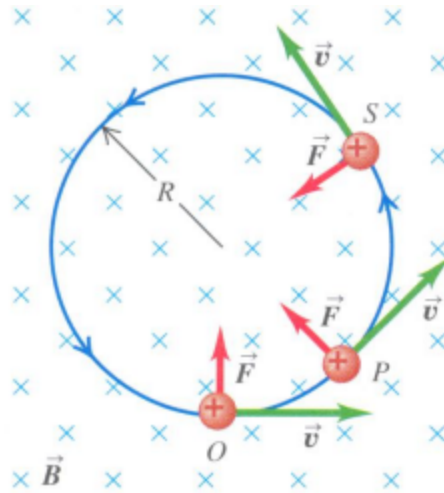


Figura 7.9: Usando la regla de la mano derecha, es sencillo comprobar que la fuerza de Lorentz induce un movimiento circular en los planos perpendiculares a \vec{v}_{\parallel}

Analicemos algo este movimiento. En primer lugar, el módulo de la fuerza de Lorentz vendrá dado por

$$F = |q|Bv_{\perp} \quad (7.99)$$

Ya que $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$. Además, esta fuerza será igual a la fuerza centrípeta

$$|q|Bv_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{R} \quad (7.100)$$

De donde es sencillo deducir el radio de la trayectoria

$$R = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (7.101)$$

Otros parámetros interesantes de esta trayectoria son la frecuencia angular

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{R} = \frac{|q|B}{m} \quad (7.102)$$

Y la frecuencia lineal, también conocida como frecuencia de ciclotrón

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} \quad (7.103)$$

Finalmente, el movimiento total de la partícula será la superposición del movimiento con velocidad constante en la dirección de \vec{v}_{\parallel} y de los movimientos circulares en los planos perpendiculares a esta dirección. El resultado es que la partícula se mueve en una trayectoria helicoidal, como se muestra en la figura.

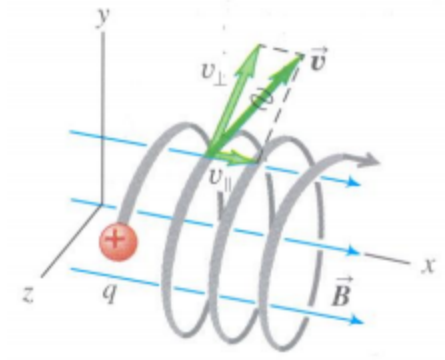


Figura 7.10: Movimiento helicoidal de la partícula

Capítulo 8

Magnetostática en medios materiales

Hasta el momento hemos tratado con el campo magnético en el vacío. En este tema estudiaremos su interacción con los medios materiales, pero antes debemos introducir el concepto de momento dipolar magnético.

8.1. Expansión multipolar del potencial vector

Vamos a empezar este tema realizando un desarrollo similar al que hicimos con el potencial escalar eléctrico. Consideremos una corriente filamental cerrada cualquiera, y preguntémonos por el potencial vector en puntos alejados

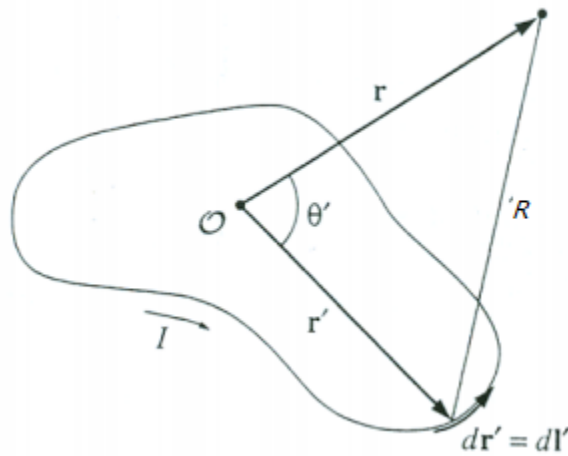


Figura 8.1: Circuito cerrado por el que circula una intensidad constante I . Llamaremos C a la trayectoria cerrada descrita por el circuito

El potencial vector generado por esta distribución será

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \oint_C \frac{I d\vec{r}'}{R} \quad (8.1)$$

Ahora, podemos realizar la misma expansión para R^{-1} que hicimos para el potencial escalar

(expresión 2.65) para escribir el potencial vector en función de los polinomios de Legendre

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint_C (r')^n P_n(\cos \theta') d\vec{r}' \quad (8.2)$$

Expresión conocida como expansión multipolar del potencial vector, y que tiene la misma utilidad que la expansión para el potencial escalar eléctrico.

Si desarrollamos el primer término (llamado término monopolar), este será

$$\vec{A}_{mono} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \oint_C d\vec{r}' = 0 \quad (8.3)$$

Algo totalmente lógico, ya que el hecho de que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ nos dice que no existen monopolos magnéticos (que serían el equivalente a una carga puntual magnética). Ya que es nulo, el término monopolar es poco interesante, así que calcularemos el término dipolar

$$\vec{A}_{dip} = \frac{I\mu_0}{4\pi r^2} \oint_C r' \cos \theta' d\vec{r}' = \frac{I\mu_0}{4\pi r^2} \oint_C \hat{r} \cdot \vec{r}' d\vec{r}' \quad (8.4)$$

Ahora, utilizaremos la siguiente igualdad

$$\oint_C \hat{r} \cdot \vec{r}' d\vec{r}' = -\hat{r} \times \int_S d\vec{s}' \quad (8.5)$$

Donde S es la superficie encerrada por el contorno C. Podemos entonces expresar el término dipolar como

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} \quad (8.6)$$

Donde \vec{m} es el vector momento dipolar magnético, y viene dado por

$$\vec{m} \equiv \int_S I d\vec{s}' = I \int_S d\vec{s}' \quad (8.7)$$

Es decir, es un vector perpendicular al plano en el que está contenido el circuito C, y cuyo módulo depende de la intensidad que circula por el circuito y del área encerrada por el mismo. A partir de la expresión 8.6, podemos deducir el campo creado por un dipolo magnético

$$\vec{B}_{dip} = \nabla \times \vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta} \right) \quad (8.8)$$

Cabe destacar las grandes similitudes entre el campo y el potencial vector generados por un dipolo magnético y las expresiones 2.55 y 2.56, referidas a los dipolos eléctricos.

8.1.1. Interacción campo-dipolo

Vamos a considerar una espira rectangular de lados a y b por la que circula una intensidad I , que está situada en una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme \vec{B} , como se puede ver en la figura

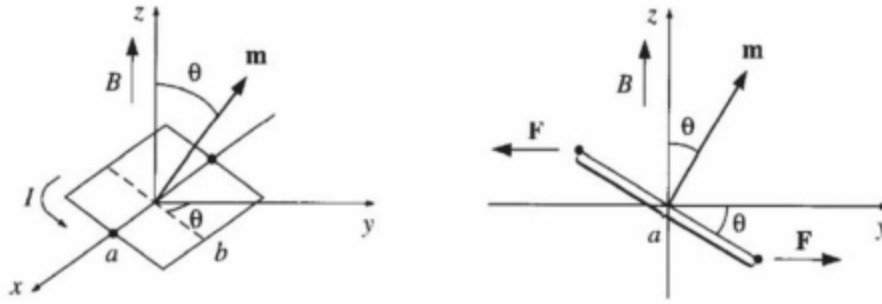


Figura 8.2: Esquema de la situación. Se indica también el momento dipolar magnético de la espira, m , así como la posible inclinación de la espira con respecto al eje z . A la espira solo se le permite rotar de la manera indicada.

En primer lugar, es sencillo obtener el módulo del momento dipolar magnético de la espira, ya que será la intensidad por el área de la espira

$$|\vec{m}| = Iab \quad (8.9)$$

Si ahora nos preguntamos por la fuerza que experimenta cada uno de los lados del rectángulo, es sencillo ver que todas ellas van en el sentido que se indica en la figura (hacia fuera del rectángulo). En cuanto a su magnitud, esta vendrá dada por la ley de Lorentz

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (8.10)$$

Y por lo tanto, la fuerza sobre cada uno de los lados será

$$F_a = \int_0^a IB \sin \theta dl = IaB \sin \theta \quad (8.11)$$

$$F_b = \int_0^b IB dl = IbB \quad (8.12)$$

Es sencillo ver que la fuerza total sobre el rectángulo es nula, ya que la fuerza sobre uno de los lados es compensada por la fuerza sobre el lado opuesto. Sin embargo, sí que existe un par de fuerzas \vec{T} . Para calcular uno de ellos, consideremos las fuerzas en los sentidos \hat{y} y $-\hat{y}$, es decir, las fuerzas sobre los lados de longitud b .

$$\vec{T} = 2 \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = 2rF \sin \theta = IabB \sin \theta \hat{x} \quad (8.13)$$

Donde el factor dos está teniendo en cuenta la contribución de la fuerza que actúa sobre cada uno de los lados. Este par de fuerzas se puede escribir de forma mucho más concisa en función del momento dipolar magnético

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.14)$$

Ahora vamos a ver como evoluciona este sistema con el paso del tiempo. De las ecuaciones de la dinámica de rotación tenemos que

$$\sum_i \vec{M}_i = I \vec{\alpha} \quad (8.15)$$

Donde los \vec{M}_i son los distintos momentos actuando sobre el sistema, $\vec{\alpha}$ es el vector aceleración angular e I es el momento de inercia del objeto respecto al eje de rotación. Aplicando esta ecuación a nuestro sistema tenemos que

$$\vec{m} \times \vec{B} = I \vec{\alpha} \quad (8.16)$$

Ahora vamos a ponerlo todo en función de la coordenada generalizada θ . Es sencillo obtener el primer miembro en función de este ángulo

$$mB \sin \theta \hat{x} = I \vec{\alpha} \quad (8.17)$$

Ahora, para determinar el valor de $\vec{\alpha}$ en función del ángulo, es quizá más cómodo utilizar el ángulo complementario a θ , al que llamaremos φ . La relación entre ellos será

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (8.18)$$

De donde se desprende que

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (8.19)$$

Ahora, para giros donde la velocidad angular sea positiva ($\vec{\omega} \parallel \hat{x}$), la coordenada φ aumentará, por lo que tendremos

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (8.20)$$

Y por lo tanto, la aceleración angular será

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (8.21)$$

Y finalmente, la ecuación diferencial del movimiento, en términos del ángulo θ será

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mB \sin \theta \quad (8.22)$$

En general esta ecuación diferencial es complicada de resolver, pero si consideramos pequeñas oscilaciones alrededor de $\theta = 0$, podremos aproximar $\sin \theta \approx \theta$ para obtener la siguiente ecuación diferencial

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mB\theta \quad (8.23)$$

Que es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia $\omega_0^2 = \frac{mB}{I}$. La solución será

$$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (8.24)$$

Donde A y δ son constantes fijadas por las condiciones iniciales.

Hemos encontrado entonces que al someter un dipolo magnético a un campo \vec{B} externo, inducimos en este oscilaciones respecto a una posición de equilibrio¹, en la que el campo externo y el momento dipolar magnético están alineados. El hecho de que los dipolos magnéticos intenten alinear sus vectores momento dipolar con el campo externo será de gran importancia a continuación, cuando hablemos de la interacción del campo magnético con la materia.

8.2. Medios magnéticos

Es conocido que la materia está compuesta por átomos, que según el modelo clásico están compuestos por un núcleo positivo y electrones orbitado a su alrededor. De esta manera, podemos pensar en el movimiento de los electrones alrededor del núcleo como una corriente filamental en un circuito cerrado, que como hemos visto lleva asociado un momento dipolar magnético \vec{m} .

¹Para el caso en el que no podamos aproximar $\sin \theta \approx \theta$, se siguen dando oscilaciones, algo sencillo de deducir aunque no podamos obtener la función $\theta(t)$.

Pensemos en un material magnético, compuesto por una gran cantidad de átomos que presentan cada uno un momento dipolar magnético. En ausencia de campos externos, la mayoría de los materiales tendrán los momentos de sus átomos orientados en direcciones arbitrarias, por lo que las contribuciones de cada átomo se cancelan y no se aprecian efectos macroscópicos. Sin embargo, al aplicar un campo \vec{B} externo, los momentos tenderán a alinearse con este, y por lo tanto se reforzarán entre sí hasta que se aprecie un efecto macroscópico. Tal y como hicimos con el vector polarización, es posible asociar un vector a este efecto macroscópico, al que llamamos vector magnetización, \vec{M}

$$\vec{M} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{n\Delta v} \vec{m}_k}{\Delta v} \quad (8.25)$$

Donde n es el número de átomos por unidad de volumen en nuestro material. Según esta definición, se puede ver que la magnetización es distinta de cero cuando los distintos \vec{m}_k presentes en un volumen se refuerzan entre sí (están alineados).

Como apunte, es necesario destacar que, aunque como idea intuitiva es suficiente, la justificación que hemos dado para la magnetización de los materiales no es del todo consistente con la teoría clásica, ya que hay ciertos efectos que es imposible explicar sin utilizar conceptos de la mecánica cuántica, como los momentos de spin.

8.2.1. Corrientes de magnetización

Vamos a seguir el razonamiento de que podemos modelar la materia como un conjunto de dipolos magnéticos, y vamos a calcular el potencial vector que genera una distribución arbitraria de materia. De la expresión 8.6 se desprende que

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.26)$$

Para hallar el potencial vector generado por una porción de materia que ocupa un volumen τ , no habrá más que integrar esta expresión

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{d\vec{m}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.27)$$

Ahora, de la ecuación 8.25 se deduce que

$$d\vec{m}(\vec{r}') = \vec{M}(\vec{r}') dV' \quad (8.28)$$

Que nos lleva a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (8.29)$$

Ahora, utilizando que

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.30)$$

Podemos expresar el potencial vector como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (8.31)$$

Utilizando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (u\vec{C}) = (\nabla u) \times \vec{C} + u (\nabla \times \vec{C}) \quad (8.32)$$

Es sencillo deducir que

$$\vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad (8.33)$$

Y el potencial vector toma la siguiente forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla' \times \left(\frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (8.34)$$

Ahora usaremos un resultado conocido. Si V es un volumen arbitrario limitado por una superficie cerrada S , y \vec{C} es un campo vectorial, se cumple que

$$\int_V \nabla \times \vec{C} dv = - \oint_S \vec{C} \times \hat{n} ds \quad (8.35)$$

Donde \hat{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie S y orientado hacia el exterior de la misma. Así pues, podemos escribir el potencial vector como la suma de una integral de volumen y otra de superficie

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \hat{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds \quad (8.36)$$

Ahora, si comparamos esta expresión con la dada por el teorema de Helmholtz, vemos que es equivalente al potencial vector generado por una corriente volúmica \vec{J}_m y una superficial \vec{K}_m , tales que

$$\vec{J}_m \equiv \nabla \times \vec{M} \quad (8.37)$$

$$\vec{K}_m \equiv \vec{M} \times \hat{n} \quad (8.38)$$

A estas corrientes se las conoce como corrientes de magnetización, y son las análogas a las densidades de carga de polarización para los materiales dieléctricos. Para pensar en ellas de una manera algo más intuitivo, veamos las siguientes figuras.

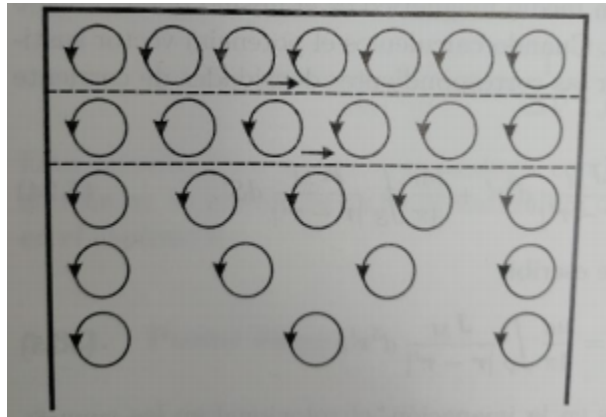


Figura 8.3: Idea intuitiva de la densidad de corriente de magnetización \vec{J}_m

. Las corrientes circulares representan átomos. Se puede ver que existen zonas en las que unas corrientes compensan otras, dando un resultado nulo. Pero en zonas donde el material está menos magnetizado (centro) hay menos átomos con momentos alineados, y las microcorrientes totales dejan de anularse entre ellas, dando lugar a una corriente de magnetización macroscópica.

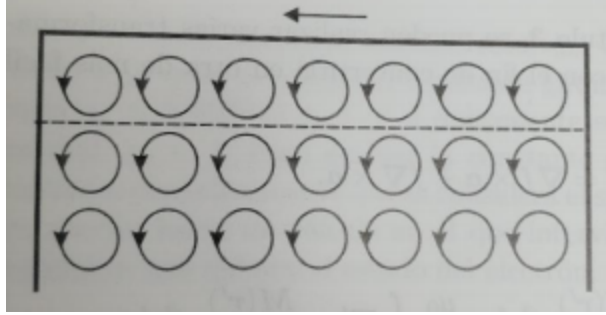


Figura 8.4: Idea intuitiva de las corrientes superficiales de magnetización. En la frontera del material, las microcorrientes dejan de anularse entre ellas y dan lugar a la \vec{K}_m macroscópica.

8.2.2. La intensidad de campo magnético \vec{H}

Al igual que ocurrió con el caso del campo eléctrico, el hecho de que existan las corrientes de magnetización hace que tengamos que modificar la ecuación del rotacional de \vec{B} , ya que este tendrá contribuciones tanto de las corrientes libres como de las corrientes de imanación

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 (\vec{J}_{libre} + \vec{J}_m) \quad (8.39)$$

Podemos expresar la corriente de imanación en función de la magnetización

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{libre} + \nabla \times \vec{M}) \quad (8.40)$$

De donde se deduce que

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{libre} \quad (8.41)$$

Ahora, definimos el vector intensidad de campo magnético, \vec{H}

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (8.42)$$

De tal manera que su rotacional solo depende de las corrientes libres, al igual que la divergencia de \vec{D} tan solo dependía de las distribuciones de carga libre. Sin embargo, y de manera similar a como $\nabla \times \vec{D} \neq 0$, la divergencia de \vec{H} también será no nula en general

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\nabla \cdot \vec{B}}{\mu_0} - \nabla \cdot \vec{M} = -\nabla \cdot \vec{M} \neq 0 \quad (8.43)$$

Descubrimos entonces que el campo \vec{H} si que puede tener fuentes escalares, dadas por $-\nabla \cdot \vec{M}$. En ocasiones, a esta función se la conoce como densidad de monopolos magnéticos, aunque puede causar confusión. De aquí en adelante, siempre que hablemos de monopolos magnéticos nos estaremos refiriendo a las fuentes escalares de \vec{H} (que es un campo ficticio que no se corresponde con algo físico) y no a una "carga magnética", que nunca se ha observado en la naturaleza.

8.2.3. El tensor susceptibilidad magnética

Para medios lineales, existe una relación entre el campo \vec{H} y la magnetización, dada por

$$\vec{M} = \chi_m(\vec{r}) \vec{H} \quad (8.44)$$

Donde a $\chi_m(\vec{r})$ se le llama tensor susceptibilidad magnética, y se puede representar mediante una matriz 3×3 . En esta representación, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \chi_{m11}(\vec{r}) & \chi_{m12}(\vec{r}) & \chi_{m13}(\vec{r}) \\ \chi_{m21}(\vec{r}) & \chi_{m22}(\vec{r}) & \chi_{m23}(\vec{r}) \\ \chi_{m31}(\vec{r}) & \chi_{m32}(\vec{r}) & \chi_{m33}(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

Es decir, que las distintas componentes de la magnetización vendrán dadas por

$$M_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{mij} H_j \quad (8.46)$$

Para medios lineales e isotropos, el tensor adquiere una forma diagonal con tres autovalores iguales, de manera que la relación entre \vec{M} y \vec{H} será

$$\vec{M} = \chi_m(\vec{r}) \vec{H} \quad (8.47)$$

Donde ahora $\chi_m(\vec{r})$ es una función escalar. Finalmente, si además el medio es homogéneo, $\chi_m(\vec{r}) = cte$, y la relación será

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (8.48)$$

Si ahora sustituimos esta expresión en 8.42, tendremos que

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{M} + \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (8.49)$$

Ahora definimos la permeabilidad relativa del medio, μ_r como

$$\mu_r \equiv 1 + \chi_m \quad (8.50)$$

De modo que

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (8.51)$$

Donde $\mu \equiv \mu_0 \mu_r$ es la permeabilidad absoluta del medio.

8.2.4. Potencial escalar magnético

Consideremos la divergencia y el rotacional de \vec{H}

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{libre} \end{cases} \quad (8.52)$$

Consideremos el caso en el que no existen corrientes libres. En tal situación, el campo \vec{H} verificará que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \\ \nabla \times \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (8.53)$$

Al ser un campo irrotacional, podemos asegurar que, según el teorema de Helmholtz, tendrá que provenir del gradiente de una función escalar

$$\vec{H} = -\nabla \phi_m \quad (8.54)$$

Donde a la función ϕ_m se la conoce como potencial escalar magnético. De esta manera, podemos tomar la divergencia de \vec{H} y ponerla en función de este potencial escalar magnético.

$$\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot (\nabla \phi_m) = \nabla^2 \phi_m \quad (8.55)$$

Y llegamos a que el potencial escalar magnético tiene que verificar la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi_m = \rho_m \quad (8.56)$$

Donde $\rho_m \equiv \nabla \cdot \vec{M}$ es la densidad de polos magnéticos. Así pues, si sabemos que no existen cargas libres en nuestro sistema, podemos determinar el campo \vec{H} sin más que conocer la densidad de polos magnéticos.

8.3. Clasificación de los materiales magnéticos

Vamos a clasificar los medios l.h.i en función de su comportamiento en presencia de un campo magnético. Para ello, pensemos en el siguiente dispositivo experimental

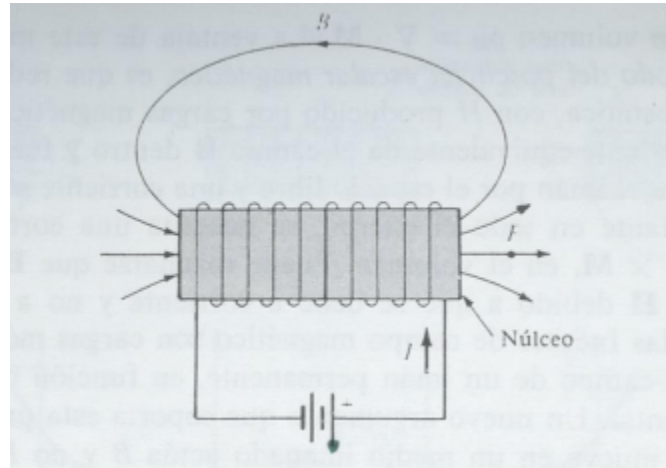


Figura 8.5: Si hacemos circular una intensidad I por el devanado se formará un campo magnético aproximadamente homogéneo en el interior del solenoide, cuyo valor dependerá del material del que esté hecho el núcleo del mismo.

Si llamamos B_0 a la intensidad del campo magnético en el interior del solenoide cuando su núcleo es el vacío. Si B es el módulo del campo magnético al introducir un cierto material, en función de lo que ocurra el material será

$$\text{Diamagnético} \implies \frac{B}{B_0} < 1$$

$$\text{Paramagnético} \implies \frac{B}{B_0} > 1$$

$$\text{Ferromagnético} \implies \frac{B}{B_0} \gg 1$$

Ahora bien, en ambas situaciones (núcleo vacío y núcleo arbitrario), la distribución de corrientes libres es la misma, por lo que el campo \vec{H} será el mismo en ambos casos. Por lo tanto

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\mu H}{\mu_0 H} = \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r \quad (8.57)$$

Y por lo tanto podemos clasificar los materiales l.h.i en función de su permeabilidad relativa

$$\text{Diamagnético} \implies \mu_r < 1 \implies \chi_m < 0$$

$$\text{Paramagnético} \implies \mu_r > 1 \implies \chi_m > 0$$

$$\text{Ferromagnético} \implies \mu_r \gg 1 \implies \chi_m \gg 0$$

A partir de datos experimentales, se pueden obtener diversas representaciones de M frente a H , como se puede ver en la siguiente figura.

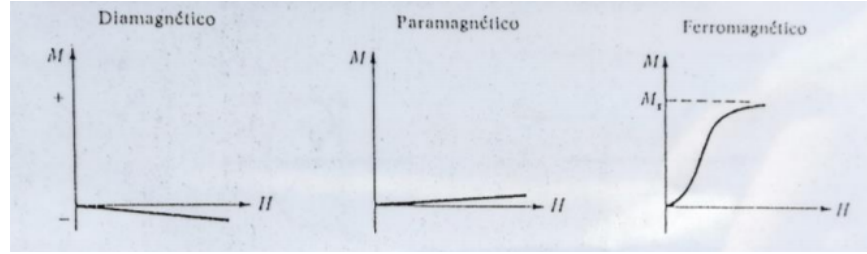


Figura 8.6: Relación entre la magnetización y la intensidad de campo magnético. Como se puede ver, para materiales diamagnéticos y paramagnéticos, la relación es lineal (χ_m), mientras que para los materiales ferromagnéticos, la relación es más compleja.

En cuanto al comportamiento de estos materiales en presencia de campos magnéticos, los materiales diamagnéticos se ven repelidos por estos campos, ya que el campo magnético tiene baja tendencia e introducirse en ellos ($\mu_r < 1$). Por otro lado, los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos se ven atraídos por los campos magnéticos.

8.3.1. Dominios magnéticos. Ciclo de histéresis

Vamos a tratar de explicar el comportamiento de los materiales ferromagnéticos, y para ello necesitamos introducir la noción de dominio magnético. Imaginemos que nuestro material ferromagnético está dividido en celdas de tamaño variable, cada una de ellas totalmente magnetizada

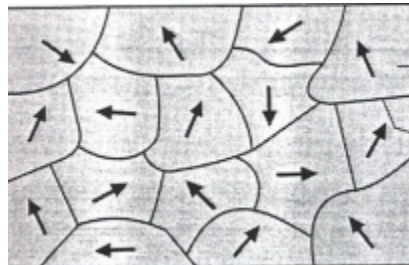


Figura 8.7: Modelo de dominios. En cada una de las regiones, todos los átomos tienen sus momentos magnéticos apuntando en la misma dirección.

La existencia de los dominios magnéticos está verificada experimentalmente. Cada uno de ellos tiene dimensiones variables, que van desde las micras a los milímetros. Cuando el material no está magnetizado, lo que ocurre es que los dominios están colocados al azar, de manera que los momentos se compensan y la magnetización neta es nula. Sin embargo, al aplicar un campo \vec{H} externo, las paredes de los dominios se mueven, de manera que los dominios con momento magnético alineado con el campo externo crecen, mientras que el resto disminuye su volumen, de manera que las contribuciones de los momentos alineados con el campo se vuelven significativas, generando una magnetización a nivel macroscópico y aumentando el valor de \vec{B} en el interior del material.

Para valores relativamente pequeños del campo aplicado, este proceso de reestructuración de los dominios es reversible, y la relación entre el campo aplicado y el campo en el interior del material es aproximadamente lineal. Sin embargo, a partir de ciertos valores del campo aplicado, el proceso deja de ser reversible, y si se reduce este campo externo, el campo interno recorre una curva diferente, efecto conocido como histéresis

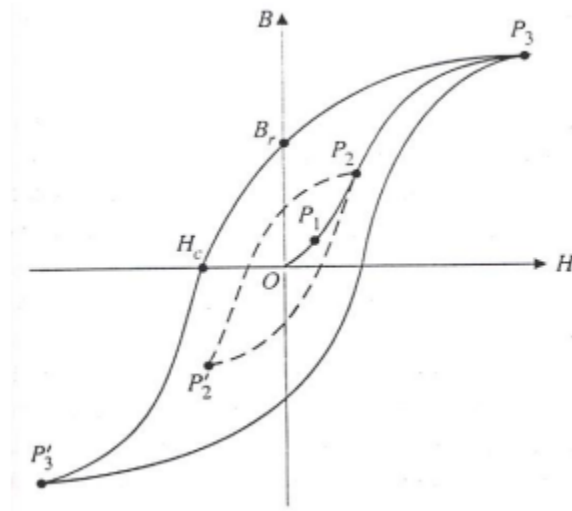


Figura 8.8: Representación gráfica de dos posibles ciclos de histéresis. En el eje horizontal se representa el campo aplicado, y en el vertical el campo en el interior del material.

En la figura se representa la evolución de un material ferromagnético ante un campo externo. Comenzando en el origen (cuando no existe campo magnético aplicado y el campo en el interior del material es nulo), se empieza a aplicar un campo \vec{H} externo, y el material responde alineando sus dominios magnéticos de manera reversible, hasta que se llega al punto P_1 . A partir de ahí, el movimiento de las paredes de los dominios deja de ser reversible. Si se continúa aumentando el valor del campo aplicado, se llegará a un punto (P_3) en el que por mucho que se aumente el campo externo, la respuesta del material es siempre la misma. A este valor límite del campo \vec{B} en el interior del material se lo conoce como campo de saturación.

Si Ahora comenzamos a disminuir la intensidad del campo aplicado, el campo en el interior irá disminuyendo, pero no por la misma curva, ya que aunque apagemos el campo externo, el campo magnético en el interior del material no se anulará, sino que adoptará un valor B_r , llamado campo remanente. Si se quiere eliminar por completo el campo \vec{B} en el material, será necesario aplicar un campo externo con sentido opuesto al que se usó en un primer momento (que en la gráfica se representa haciendo que $H < 0$). Al valor del campo externo necesario para que $B = 0$ en el material, H_c , se le llama campo coercitivo.

Los imanes permanentes se deben precisamente a la existencia del campo remanente, ya que una vez magnetizados (aplicando un campo externo), presentan un carácter magnético aún cuando este campo externo se ha apagado.

8.3.2. Materiales ferromagnéticos duros y blandos

Según su uso en la industria, los materiales ferromagnéticos se clasifican en materiales duros y materiales blandos.

Los materiales ferromagnéticos blandos se usan en generadores y transformadores, y son sometidos a campos externos variables de forma continuada. Por este motivo, se busca que tengan una respuesta fuerte a campos externos lo más débiles posible (puesto que así es más sencillo generarlos). Por lo tanto, los ciclos de histéresis de los materiales blandos tendrán una curva muy alta, con un valor elevado del campo remanente. Además, y como veremos más adelante, el área encerrada en la curva de histéresis se relaciona con la energía nece-

saría para realizar un ciclo completo, por lo que los ciclos de estos materiales deberán ser estrechos, con un valor pequeño del campo coercitivo.

Por otro lado, los materiales ferromagnéticos duros son los buenos imanes permanentes, y por lo tanto tienen curvas de histéresis muy anchas, con unos valores de campo coercitivo muy elevados, lo cual garantiza que desmagnetizar el material sea muy complicado.

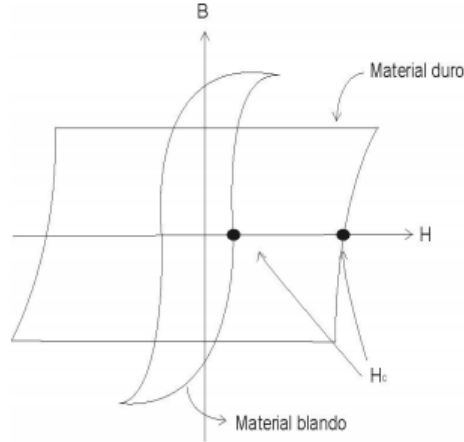


Figura 8.9: Ciclos de histéresis de dos tipos de material ferromagnético. Se puede apreciar la diferencia entre sus campos coercitivos.

8.4. Condiciones de contorno en la separación entre medios

8.4.1. Medios l.h.i

En estos medios, se cumplen las siguientes expresiones

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \mu \vec{H} = \vec{B} \end{cases} \quad (8.58)$$

Como ya sabemos, la divergencia de un campo se puede relacionar con sus componentes normales en la separación entre dos medios. Siguiendo el mismo razonamiento que hicimos en el tema 3, es sencillo demostrar que

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (8.59)$$

Es decir, que las componentes normales de \vec{B} se conservan en la separación entre medios. Si ahora introducimos la relación entre \vec{B} y \vec{H} , llegamos a

$$\hat{n} \cdot (\mu_2 \vec{H}_2 - \mu_1 \vec{H}_1) = 0 \quad (8.60)$$

Por otra parte, el rotacional se relaciona con las componentes tangenciales. De nuevo, utilizando el mismo razonamiento que en el tema 3, llegamos a

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (8.61)$$

Donde \vec{K} es la densidad superficial de corriente libre en la superficie de separación. Finalmente, para el campo \vec{B} , tendremos que

$$\hat{n} \times \left(\frac{\vec{B}_2}{\mu_2} - \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} \right) = \vec{K} \quad (8.62)$$

8.4.2. Medios de imanación arbitraria

Si queremos expresar los campos \vec{B} y \vec{H} en función de la imanación, tendremos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_0 (\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{array} \right. \quad (8.63)$$

La ecuación para la divergencia de \vec{B} no ha cambiado (ya que siguen sin existir los monopolos magnéticos), por lo que de nuevo obtendremos la conservación de las componentes normales de este campo

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (8.64)$$

Para las componentes normales de \vec{H} , podemos obtener una expresión en función de la magnetización

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\hat{n} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \quad (8.65)$$

Como la ecuación para el rotacional de \vec{H} no ha cambiado, se obtiene la misma ecuación para sus componentes tangenciales

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (8.66)$$

Pero al no contar con la relación constitutiva ($\vec{B} = \mu \vec{H}$), para hallar la expresión para las componentes de \vec{B} hay que usar de nuevo cálculos como los del tema 3, llegando a que

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \left(\vec{K} + \hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \right) \quad (8.67)$$

Que, en función de las corrientes de magnetización²

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 (\vec{K} + \vec{K}_m) \quad (8.68)$$

8.5. Circuitos magnéticos

Al igual que cuando estudiamos el campo eléctrico, era posible utilizar conductores para transportar portadores de carga y realizar trabajo, se pueden crear circuitos a partir de materiales magnéticos, donde lo que circula es un campo magnético. Por otro lado, donde

²Esto es sencillo de deducir sabiendo que $\nabla \times \vec{M} = \vec{J}_m$, y aplicando las condiciones de frontera para este campo.

en un circuito eléctrico tendríamos una batería manteniendo una cierta diferencia de potencial a través de una fuerza electromotriz, en un circuito magnético tendremos una fuerza magnetomotriz, generada por espiras arrolladas alrededor del material magnético del que está compuesto el circuito, formando un solenoide que generará un campo magnético en su interior.

A modo de ejemplo, consideremos el circuito magnético más simple

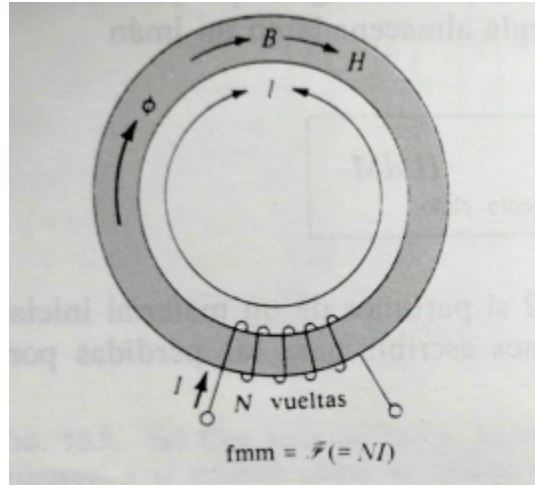


Figura 8.10: Circuito magnético circular. A lo largo de las espiras circula una corriente I , que generará un campo magnético en el interior del circuito.

Un parámetro importante cuando hablábamos de circuitos eléctricos era la resistencia, que según la ley de Ohm es el cociente entre la fuerza electromotriz y la intensidad. Pues bien, en los circuitos magnéticos definimos una magnitud similar, la reluctancia, el cociente entre la fuerza magnetomotriz y el flujo magnético

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r}}{\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}} \quad (8.69)$$

Calculemos, a modo de ejemplo, la reluctancia del circuito magnético de la figura. Para ello, tendremos en cuenta una serie de aproximaciones. La primera de ellas es que la permeabilidad magnética, μ del material del que está hecho el circuito (que presupondremos lineal, homogéneo e isótropo) es mucho mayor que la del vacío, de modo que el campo magnético está confinado en su interior. Además, consideraremos que el campo magnético es siempre de módulo constante y perpendicular a la sección del circuito. Bajo estas restricciones, la reluctancia es muy sencilla de calcular

$$\mathcal{R} = \frac{\int_0^L H dr}{\int_S B ds} = \frac{HL}{BS} = \frac{L}{\mu S} \quad (8.70)$$

Donde L y S son la longitud y la sección del circuito, respectivamente.

8.5.1. Leyes de Kirchhoff para circuitos magnéticos

Para los circuitos eléctricos, las leyes de Kirchhoff tomaban la siguiente forma

$$\sum_{Malla} V - \sum_{Malla} RI = 0 \quad (8.71)$$

$$\sum_{Nudo} I = 0 \quad (8.72)$$

Se puede demostrar que, en el caso de los circuitos magnéticos, las leyes que se cumplen tienen la misma forma, pero con las magnitudes correspondientes a los circuitos magnéticos

$$\sum_{Malla} NI - \sum_{Malla} \mathcal{R}\phi = 0 \quad (8.73)$$

$$\sum_{Nudo} \phi = 0 \quad (8.74)$$

Donde NI es la fuerza magnetomotriz y ϕ el flujo magnético.

Capítulo 9

Campos variables en el tiempo I

Hasta ahora hemos tratado tan solo con campos estáticos, que no tenían ninguna dependencia temporal. A lo largo de este tema, comenzaremos a explicar el comportamiento de los campos electromagnéticos que exhiben dependencias temporales, centrándonos en la idea de la energía magnética.

9.1. Inducción electromagnética. La ley de Faraday

El postulado fundamental de la inducción electromagnética, basado en la evidencia experimental, es el siguiente

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.1)$$

Antes de discutir las implicaciones de este postulado, veamos que es coherente con lo que hemos estudiado hasta ahora, ya que para el caso estático, en el que \vec{B} no depende del tiempo, se reduce al segundo postulado de la electrostática en el vacío.

Esta ecuación es la primera que estudiaremos que liga los campos eléctricos y magnéticos, ya que según este postulado, las fuentes del campo eléctrico no son solo las cargas, sino que campos magnéticos variables en el tiempo también pueden generar un campo eléctrico. Veamos de que manera

9.1.1. Circuito estacionario en un campo variable

Consideremos un circuito cerrado hecho de material conductor, caracterizado por un camino cerrado Γ que se encuentra en una región del espacio en la que existe un campo magnético variable en el tiempo $\vec{B}(t)$. Si integramos ambos miembros de la ecuación 9.1 en la superficie S contenida en el interior de Γ , tendremos que

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (9.2)$$

Utilizando el teorema del rotacional en el primer miembro

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (9.3)$$

Ahora, como el circuito Γ , y por lo tanto la superficie S , no cambian con el tiempo, podemos reescribir el segundo miembro como

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (9.4)$$

Ahora podemos identificar el término de la izquierda con la fuerza electromotriz que se induce en el circuito, ε , y el término de la derecha con la derivada temporal del flujo del campo magnético a través del circuito, al que llamaremos ϕ

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \quad (9.5)$$

Esta es la expresión conocida como la ley de inducción de Faraday.

9.1.2. Circuito móvil en un campo variable

Para un circuito móvil no podemos aplicar la misma lógica que en el caso estático, ya que el camino Γ es variable en el tiempo y no podemos sacar la derivada de la integral, además de que puede existir una variación de flujo generada por el movimiento del circuito. Para tratar este caso, consideremos la fuerza ejercida sobre una carga q que se mueve en una región donde existen un campo eléctrico y un campo magnético con una cierta velocidad \vec{v}

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (9.6)$$

Supongamos un observador que se mueve con la carga. Para este observador no hay movimiento aparente (en su sistema de referencia, la carga está quieta). Sin embargo, este observador si que observa la fuerza ejercida por la carga. Este observador podría interpretar la fuerza sobre la carga como la generada por un campo eléctrico \vec{E}'

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (9.7)$$

La fuerza electromotriz medida en el marco móvil, ε' será entonces

$$\varepsilon' = \oint_{\Gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} \quad (9.8)$$

Que utilizando la ecuación 9.1, se puede escribir como

$$\varepsilon' = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (9.9)$$

Que es la forma general de la ley de Faraday. Es sencillo ver que se reduce a la expresión 9.5 cuando $\vec{v} = 0$, ya que en esa situación si que se puede sacar la derivada de la integral (ya que Γ no varía con el tiempo).

9.2. Inductancias e inductores

Consideremos dos circuitos cerrados arbitrarios, caracterizados por las curvas cerradas C_1 y C_2 . Si se hace circular una intensidad I_1 por el primer circuito, se generará un campo magnético \vec{B}_1 . Parte de las líneas de este campo pasarán a través de C_2 , generando un flujo magnético ϕ_{12} . La pregunta es si podemos expresar este flujo magnético de forma simple. Dicho flujo vendrá dado por

$$\phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2 \quad (9.10)$$

Donde S_2 es la superficie limitada por C_2 . Para simplificar esta expresión, vamos a escribirla en función del potencial vector generado por la corriente I_1

$$\phi_{12} = \int_{S_2} (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{s}_2 \quad (9.11)$$

Utilizando el teorema del rotacional

$$\phi_{12} = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{r}_2 \quad (9.12)$$

Y sustituyendo el potencial vector por su expresión

$$\phi_{12} = \oint_{C_2} \left(\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{r}_1}{r} \right) \cdot d\vec{r}_2 \quad (9.13)$$

Donde r es la distancia entre dos puntos, cada uno situado en uno de los circuitos. Reorganizando términos

$$\phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{r} = M_{12} I_1 \quad (9.14)$$

Donde hemos definido el siguiente parámetro

$$M_{12} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{r} \quad (9.15)$$

Que se denomina coeficiente de inducción mútua entre ambos circuitos, y que es un parámetro puramente geométrico. En general, para un sistema de N circuitos, tendremos que el coeficiente de inducción mútua entre dos de ellos viene dado por

$$M_{ij} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\vec{r}_i \cdot d\vec{r}_j}{r} \quad (9.16)$$

Que se conoce como la ecuación de Neumann. Es sencillo ver que esta ecuación es simétrica con respecto a los índices, y que por lo tanto

$$M_{ij} = M_{ji} \quad (9.17)$$

Así pues, si sobre el circuito i se hace circular una intensidad I_i , el flujo magnético generado en el circuito j por el campo magnético \vec{B}_i vendrá dado por

$$\phi_{ij} = M_{ij} I_i \quad (9.18)$$

En la práctica, antes que utilizar la ecuación de Neumann, es preferible calcular los coeficientes de inducción como

$$M_{ij} = \frac{1}{I_i} \int_{S_j} \vec{B}_i \cdot d\vec{s}_j \quad (9.19)$$

9.2.1. Autoinducción

Supongamos que, en la situación de dos circuitos en la que por C_1 circula una intensidad I_1 , nos preguntamos por el flujo magnético en este circuito. Dicho flujo estará causado por \vec{B}_1 , y vendrá dado por

$$\phi_{11} = M_{11} I_1 \quad (9.20)$$

El coeficiente de autoinducción, o autoinductancia, de un circuito se define como el flujo magnético por unidad de corriente

$$L_1 \equiv \frac{\phi_{11}}{I_1} = M_{11} \quad (9.21)$$

Ejemplo: Intensidad inducida en una espira.

Consideremos una espira rígida e inmóvil, con una resistencia R y una autoinducción L , situada en una región del espacio en la que existe un campo magnético dependiente del tiempo, $\vec{B}(t)$. Vamos a calcular la intensidad que se induce en este circuito. En primer lugar, como estamos ante un circuito estacionario e indeformable, podremos utilizar la ecuación 9.5

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{d\phi_{total}}{dt} \quad (9.22)$$

En primer lugar, vamos a utilizar la ley de Ohm para relacionar la fuerza electromotriz con la intensidad, que a priori será una función del tiempo

$$RI(t) = -\frac{d\phi_{total}}{dt} \quad (9.23)$$

Ahora vamos a descomponer el flujo magnético total en dos términos

$$\phi_{total} = \phi_B + \phi_{auto} \quad (9.24)$$

Donde ϕ_B es la contribución del campo magnético, dada por

$$\phi_B(t) = \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \quad (9.25)$$

Por otro lado, ϕ_{auto} es el flujo generado por el campo magnético creado por la intensidad inducida, que como ya hemos visto vendrá dado por

$$\phi_{auto} = LI(t) \quad (9.26)$$

Sustituyendo esto en la ley de Faraday, tendremos que

$$RI(t) = -L\frac{dI(t)}{dt} - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \quad (9.27)$$

Reorganizando términos, llegamos a

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = -\frac{1}{L} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} \quad (9.28)$$

Dado un determinado $\vec{B}(t)$, resolver esta ecuación diferencial nos permite calcular la intensidad inducida en la espira como función del tiempo.

9.3. Energía magnética

Consideremos un circuito filiforme de resistencia R y autoinducción no nula, en el que en el instante $t=0$ no circula ninguna intensidad. En ese instante, se conectan unas baterías que mantienen una diferencia de potencial V en el circuito, y que provocan que la intensidad en ese circuito pase a ser $i = I^1$. El trabajo realizado por las baterías sobre una carga dq será

$$dW_{bat} = Vdq = Vidt \quad (9.29)$$

Ahora, el hecho de que exista una intensidad distinta de cero en el circuito hará que se genere un campo magnético, y por lo tanto existirá un flujo ϕ en la espira, y existirá una fuerza electromotriz inducida que se opone a la intensidad i

$$V_{total} = V + \varepsilon \quad (9.30)$$

Y si ahora utilizamos la ley de Ohm

$$V + \varepsilon = iR \implies V = iR - \varepsilon \quad (9.31)$$

Y sustituyendo en la ecuación para el trabajo realizado por las baterías

$$dW_{bat} = i^2 R dt - i\varepsilon dt \quad (9.32)$$

¹Esta notación puede ser algo confusa. Llamamos i a la corriente en un determinado momento, e I es el valor que toma esa corriente tras un tiempo determinado. El motivo de esta notación es que más adelante consideraremos la evolución desde $i=0$ a $i=I$. Puede ser útil pensar en I como un valor de la intensidad en equilibrio, una vez se compensan la diferencia de potencial de las baterías y la contribución de la autoinducción

El primer término debería resultar familiar, ya que es la energía disipada en el circuito debido al efecto Joule, como era de esperar. Sin embargo, tenemos que ahora existe un término adicional fruto de introducir una autoinducción. Nos referiremos a este término como energía magnética, de modo que

$$dW_m = -i\varepsilon dt \quad (9.33)$$

Ahora, admitiendo que el circuito es inmóvil e indeformable, podemos aplicar la expresión 9.5 para reescribir la energía magnética en función del flujo

$$dW_m = id\phi \quad (9.34)$$

Supongamos ahora que contamos con un conjunto de N circuitos. La energía magnética almacenada en este sistema será la suma de energías de cada circuito

$$dW_m = \sum_{i=1}^N i_i d\phi_i \quad (9.35)$$

Pensemos ahora en los flujos $d\phi_i$. Para un determinado circuito, el flujo total a través de este tendrá contribuciones del campo creado por los otros circuitos, además del término de la autoinducción. Utilizando la ecuación 9.18, podemos escribir

$$d\phi_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} di_j \quad (9.36)$$

Nótese que cuando $j=i$, tenemos el término de la autoinducción, ya que $M_{ii} = L_i$. Sustituyendo en la expresión de la energía, llegamos a

$$dW_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N i_i M_{ij} di_j \quad (9.37)$$

Ahora queremos modelar la evolución de la corriente en los circuitos desde $i_i = 0$ a $i_i = I_i$. Para ello, introduciremos un parámetro α , tal que $\alpha \in [0, 1]$, y modelaremos la intensidad de la siguiente manera

$$i_i = \alpha I_i \quad (9.38)$$

$$di_j = I_j d\alpha \quad (9.39)$$

Llevando esto a la expresión de la energía, tendremos que

$$dW_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha M_{ij} I_i I_j d\alpha \quad (9.40)$$

Y la energía magnética total que interviene en el proceso de generar las intensidades será

$$W_m = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha M_{ij} I_i I_j d\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j \int_0^1 \alpha d\alpha \quad (9.41)$$

Evaluando la integral, llegamos a

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} I_i I_j \quad (9.42)$$

Que utilizando la ecuación 9.18, podemos escribir como

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \phi_i \quad (9.43)$$

Vamos a expresar esto en términos de campos. El flujo ϕ_i vendrá dado por

$$\phi_i = \int_{S_i} \vec{B}_i \cdot d\vec{s}_i = \int_{S_i} (\nabla \times \vec{A}_i) \cdot d\vec{s}_i \quad (9.44)$$

Donde S_i es la superficie limitada por el circuito. Utilizando el teorema del rotacional

$$\phi_i = \oint_{C_i} \vec{A}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (9.45)$$

Por otro lado, la intensidad I_i se puede modelar como el flujo de una corriente \vec{J}_i a través de la sección del circuito

$$I_i = \int_{S_i} \vec{J}_i \cdot d\vec{s}_i \quad (9.46)$$

Tendremos entonces que la energía será

$$W_m = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \vec{J}_i \cdot d\vec{s}_i \oint_{C_i} \vec{A}_i \cdot d\vec{r}_i \quad (9.47)$$

Ahora, como \vec{J}_i y $d\vec{s}_i$ son independientes de la integral, podemos reescribir

$$W_m = \sum_{i=1}^N \oint_{C_i} (\vec{J}_i \cdot d\vec{s}_i) (\vec{A}_i \cdot d\vec{r}_i) \quad (9.48)$$

Ahora, de manera intuitiva, vemos que $d\vec{s}_i \cdot d\vec{r}_i = dv$. Así pues, podemos decir que

$$\sum_{i=1}^N \oint_{C_i} d\vec{s}_i \cdot d\vec{r}_i \implies \int_{\tau} dv \quad (9.49)$$

Donde τ es todo el volumen donde existen corrientes. Tenemos entonces la siguiente expresión de la energía para una distribución de corrientes

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{A} dv \quad (9.50)$$

9.3.1. Energía magnética en términos de cantidades de campo

Partamos de la expresión de la energía magnética en términos de las corrientes y del potencial vector. Utilizando el hecho de que estamos tratando con corrientes libres, y que $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dv \quad (9.51)$$

Ahora utilizaremos la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{H}) \quad (9.52)$$

Para reescribir la energía magnética como

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dv - \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) dv \quad (9.53)$$

Utilizando el teorema de la divergencia en la segunda integral, siendo S la superficie que limita el volumen τ

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dv - \frac{1}{2} \oint_S (\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (9.54)$$

Si ahora tomamos τ de forma que sea un volumen esférico de manera que incluya a todas las corrientes. En la integral de superficie, tendremos que

$$|\vec{A}| \sim \frac{1}{r} \quad (9.55)$$

$$|\vec{H}| \sim \frac{1}{r^2} \quad (9.56)$$

$$|d\vec{s}| \sim r^2 \quad (9.57)$$

Y por lo tanto, la tendencia del integrando será

$$|(\vec{A} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}| \sim \frac{1}{r} \quad (9.58)$$

Si ahora hacemos tender el volumen τ a infinito, tendremos que el integrando de la integral de superficie será nulo, y la energía será

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\text{Todo el espacio}} \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{A}) dv \quad (9.59)$$

Ahora, utilizando que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\text{Todo el espacio}} \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad (9.60)$$

Que es equivalente a integrar en todas las regiones del espacio en las que existan campos \vec{B} y \vec{H} no nulos. Si, como en temas anteriores, denotamos como Ω a la unión de todas estas regiones, tendremos que

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad (9.61)$$

Al igual que hicimos con la energía electrostática, podemos introducir una densidad de energía magnética

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad (9.62)$$

Y por lo tanto la energía magnética total será

$$W_m = \int_{\Omega} w_m dv \quad (9.63)$$

9.3.2. Energía disipada en un ciclo de histéresis

Consideremos el montaje de la siguiente figura

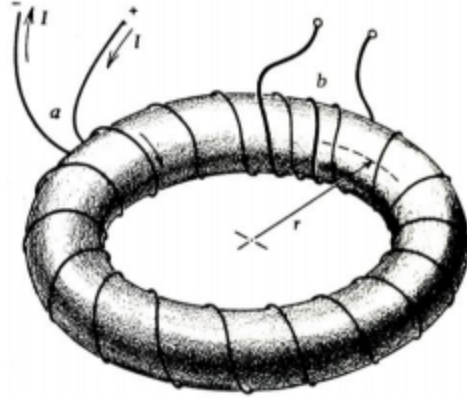


Figura 9.1: Montaje conocido como anillo de Rowland. Se trata de un material magnético de forma toroidal en el que se arrollan conductores filiformes que conducen una cierta intensidad.

Supongamos que aumentamos el valor de la intensidad que circula por el conductor filiforme hasta un cierto valor I . Haciendo esto, la fuerza electromotriz inducida en el devanado por el campo magnético del interior del toroide se opone a este incremento de la intensidad, por lo que las baterías tendrán que aportar una energía extra dada por²

$$\frac{dW}{dt} = I \left(N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (9.64)$$

Ahora, recordando lo que vimos en temas anteriores (expresión 7.68), podemos considerar el campo magnético en el interior del toroide como constante, y por lo tanto, si S es la sección del mismo, tendremos que

$$\frac{dW}{dt} = INS \frac{dB}{dt} \quad (9.65)$$

Si ahora $l = 2\pi R$ es la longitud del toroide, y τ el volumen del mismo

$$\frac{dW}{dt} = \frac{INSI}{l} \frac{dB}{dt} = \frac{IN}{l} \tau \frac{dB}{dt} \quad (9.66)$$

Ahora, fijándonos en la expresión 7.68, y teniendo en cuenta que como la magnetización en el interior del toroide es nula, $\vec{B} = \mu\vec{H}$, tenemos

$$\frac{dW}{dt} = \tau H \frac{dB}{dt} \quad (9.67)$$

De donde se deduce que

$$dW = \tau H dB \quad (9.68)$$

Es decir, la energía magnética por unidad de volumen vendrá dada por

$$\frac{W}{\tau} = \int H dB \quad (9.69)$$

Ahora, si el material del toroide es ferromagnético, sabemos que se recorrerá un ciclo de histéresis, similar al de la figura 8.8. En esa figura podemos ver que tenemos una función $H = H(B)$ describiendo un ciclo cerrado. De esta manera, al integral de la expresión anterior se corresponderá con el área bajo una sección del ciclo.

²De nuevo estamos suponiendo que toda la energía extra se disipará en forma de calor, de ahí que empleemos la ley de Joule, $\dot{W} = I\varepsilon$.

De este modo, para el anillo de Rowland, la energía magnética por unidad de volumen necesaria para modificar el valor de la intensidad se corresponde con el área bajo una sección de la curva de histéresis, de modo que si queremos recorrer todo el ciclo, la energía por unidad de volumen que han de aportar las baterías (y que terminará disipándose en forma de calor) será el área total encerrada en este ciclo.

Aunque por comodidad nosotros solo hayamos deducido este resultado para una geometría muy concreta, es posible demostrar que este es el caso general.

9.3.3. Fuerzas magnéticas

Supongamos que contamos con un sistema de circuitos por el que circula una corriente I , mantenida constante en todo momento, generada por unas baterías. Si permitimos que ciertas partes de los circuitos se muevan, es posible que una cantidad de la energía aportada por las baterías se convierta en energía mecánica (lo que disminuirá la energía magnética del sistema). El principio de conservación de la energía indica que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} + dW_m = dW_b \quad (9.70)$$

Es decir, la energía total aportada por las baterías se divide en energía mecánica, destinada a mover el sistema, y en energía magnética. Ahora, podemos utilizar la expresión 9.43 y el hecho de que la intensidad es constante para escribir

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\phi_i \quad (9.71)$$

Ahora, para mantener la intensidad constante, las baterías tendrán que contrarrestar la fuerza electromotriz inducida

$$\frac{dW_b}{dt} = I\varepsilon_{ind} = I \frac{d\phi}{dt} \implies dW_b = Id\phi \quad (9.72)$$

Sustituyendo y despejando en la ecuación de conservación de la energía

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dW_b - dW_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i d\phi_i = dW_m \quad (9.73)$$

De donde se obtiene que, cuando la intensidad en el sistema de circuitos es constante

$$\vec{F} = \nabla W_m \quad (9.74)$$

Por completitud, consideraremos el caso inusual en el que el flujo se mantiene constante. Esto equivale a que las baterías no aporten energía, ya que si $\phi = cte$, entonces $\varepsilon_{ind} = 0$. Esto se puede dar en el caso de materiales con resistencia nula, como los superconductores, que no requieren energía externa para mantener una corriente en su interior. En este caso, la conservación de la energía nos lleva a

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} + dW_m = 0 \implies \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_m \quad (9.75)$$

De donde deducimos que, para el caso de flujo constante

$$\vec{F} = -\nabla W_m \quad (9.76)$$

Capítulo 10

Campos variables en el tiempo II

En este tema unificaremos los cuatro postulados acerca de la divergencia y rotacional de los campos electromagnéticos, para lo que tendremos que modificar uno de ellos. Veremos como las ecuaciones resultantes sugieren algo sorprendente, la naturaleza ondulatoria de los campos eléctricos y magnéticos, así como las consecuencias de esto.

10.1. Ecuación de Ampère-Maxwell

Consideremos de nuevo el segundo postulado de la magnetostática, del que dedujimos la ley de Ampère

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (10.1)$$

Tomando la divergencia de ambos miembros, y recordando que la divergencia de un rotacional es nula, llegamos a que

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (10.2)$$

Esto es un problema, ya que parece ser que nuestro postulado nos indica que todas las corrientes son estacionarias, algo que sabemos que es falso. Además, sabemos que en general, la divergencia de \vec{J} viene dada por la ecuación de continuidad (ecuación 6.20). Maxwell abordó el problema añadiendo un término extra al rotacional de \vec{B} , de forma que ahora

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.3)$$

Si ahora aplicamos la divergencia a ambos miembros

$$\mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) \right) = 0 \quad (10.4)$$

Y sustituyendo el valor de la divergencia de \vec{E} , recuperamos la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \quad (10.5)$$

A la forma modificada de la ecuación para $\nabla \times \vec{B}$ se la conoce como ecuación de Ampère-Maxwell, y junto con los demás postulados forma las cuatro ecuaciones de Maxwell, que en

el vacío toman la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (10.6)$$

A veces, es común utilizar los campos auxiliares \vec{D} y \vec{H} para evitar arrastrar constantes que dependen del medio, en cuyo caso las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (10.7)$$

Para resolver cualquier problema electromagnético cualquiera, además de las ecuaciones de Maxwell son necesarias la ley de Lorentz

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (10.8)$$

Y las ecuaciones constitutivas de los medios, que para materiales l.h.i toman la forma que ya conocemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{array} \right. \quad (10.9)$$

10.2. Ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{B}

A lo largo de este desarrollo, y más adelante utilizaremos a menudo la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (10.10)$$

10.2.1. Ecuación de onda para el campo eléctrico

Consideremos la ecuación para el rotacional de \vec{E} en el vacío

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.11)$$

Tomando el rotacional de ambos miembros y empleando 10.10, llegamos a que

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (10.12)$$

Sabiendo que la divergencia de \vec{E} viene dada por las ecuaciones de Maxwell, e introduciendo el rotacional en la derivada temporal, tenemos que

$$\frac{\nabla \rho_v}{\epsilon_0} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (10.13)$$

Donde hemos sustituido el valor de $\nabla \times \vec{B}$. Manipulando términos

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \rho_v \quad (10.14)$$

Es decir, el campo eléctrico está gobernado por una ecuación en derivadas parciales conocida, la ecuación de ondas, que en este caso tiene un término inhomogéneo. La solución a esta ecuación será una onda que se mueva con la siguiente velocidad de propagación u_p

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{u_p^2} \implies u_p \equiv c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (10.15)$$

Esta velocidad de propagación resulta ser la velocidad de la luz en el vacío. Esto es un hecho tremendamente importante, ya que desveló la naturaleza ondulatoria de la luz (que no es más que un campo electromagnético), y que daría lugar a la teoría de la relatividad.

Volviendo a la ecuación de onda, si consideramos medios con conductividad nula ($\sigma = 0$), y en los que no existe carga, la ecuación se vuelve homogénea, y mucho más simple de resolver

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (10.16)$$

10.2.2. Ecuación de onda para el campo magnético

Partiendo de la expresión para el rotacional de \vec{B} en el vacío

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.17)$$

Aplicando el rotacional a ambos lados y usando 10.10

$$\nabla \left(\nabla \cdot \vec{B} \right) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \times \vec{E} \right) \quad (10.18)$$

Conocidos los valores de la divergencia de \vec{B} y del rotacional de \vec{E} , y despejando, llegamos a la siguiente ecuación

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{J} \quad (10.19)$$

De nuevo tenemos una ecuación de onda no homogénea que describe una onda que se propaga a la velocidad de la luz. Si además, como en el caso anterior, consideramos medios de conductividad nula, la ecuación se vuelve homogénea

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} = 0 \quad (10.20)$$

10.2.3. Soluciones a las ecuaciones de Maxwell

Como acabamos de ver, cualquier par de funciones \vec{E} y \vec{B} que satisfaga las ecuaciones de Maxwell para una determinada distribución de cargas y corrientes, cumplirá también las ecuaciones de onda 10.14 y 10.19. Sin embargo, la afirmación inversa no es cierta. Es posible

encontrar soluciones a las ecuaciones de onda que no satisfagan las ecuaciones de Maxwell¹, por lo que es muy importante que, siempre que resolvamos una ecuación de ondas para \vec{B} o \vec{E} , nos aseguremos de que la solución también cumple las ecuaciones de Maxwell

10.3. Funciones de potencial

Ahora desviaremos nuestra atención de los campos \vec{E} y \vec{B} para centrarnos en las funciones que los generan: el potencial vector \vec{A} y el potencial escalar ϕ . Veamos como es posible describir estas funciones a través de una ecuación de ondas.

10.3.1. Ecuación para el potencial vector

Del potencial vector conocemos su rotacional, que viene dado por el teorema de Helmholtz

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (10.21)$$

Tomando el rotacional de ambos miembros, y utilizando 10.10

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \nabla \times \vec{B} \quad (10.22)$$

El rotacional de \vec{B} viene dado por las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.23)$$

Donde estamos suponiendo que trabajamos en medios l.h.i. Para continuar, vamos a considerar por un momento la ecuación para el rotacional de \vec{E}

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10.24)$$

Se puede ver que, a diferencia del caso electrostático, el rotacional de \vec{E} ya no es necesariamente nulo. De esta manera, el campo eléctrico en general no será conservativo y no se podrá obtener del gradiente de un potencial ($\vec{E} \neq -\nabla \phi$). Sin embargo, si en la ecuación anterior sustituimos \vec{B} por el rotacional de \vec{A} , tendremos que

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \quad (10.25)$$

Y manipulando términos llegamos a

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (10.26)$$

Si ahora definimos el siguiente campo auxiliar

$$\vec{\mathcal{E}} \equiv \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (10.27)$$

Sabemos que su rotacional será nulo, y por lo tanto, según el teorema de Helmholtz, este campo se podrá expresar como el gradiente de un campo escalar, que será el potencial escalar

$$\vec{\mathcal{E}} = -\nabla \phi \quad (10.28)$$

¹No demostraremos este hecho, pero no debería sorprender, ya que la aplicación del rotacional de un rotacional que hemos utilizado para llegar a las ecuaciones de onda aumenta en uno el orden de las ecuaciones diferenciales a resolver, añadiendo soluciones.

De donde se puede deducir que el campo eléctrico se puede expresar en función de este potencial escalar y de la derivada temporal del potencial vector

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (10.29)$$

Volviendo a la ecuación 10.23, si sustituimos en ella la expresión anterior para el campo eléctrico, llegamos a la siguiente igualdad

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) \quad (10.30)$$

Manipulando la ecuación, se llega a que

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{J} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (10.31)$$

10.3.2. Ecuación para el potencial escalar

Partiendo de la relación que ya hemos deducido

$$\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \quad (10.32)$$

Tomando la divergencia de ambos miembros llegamos a

$$\nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\nabla^2 \phi \quad (10.33)$$

Y utilizando el valor de la divergencia de \vec{E} dado por las ecuaciones de Maxwell, llegamos a la siguiente ecuación diferencial para ϕ

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) \quad (10.34)$$

10.4. Transformaciones gauge

Si nos fijamos en las ecuaciones 10.31 y 10.34, veremos que en ellas aparece la divergencia del potencial vector, algo que nunca hemos calculado. Para solucionar este problema, pensemos en la utilidad que tienen el potencial vector y el potencial escalar. Son tan solo funciones auxiliares a partir de las cuales podemos calcular fácilmente los campos electromagnéticos. Las únicas condiciones que tienen que cumplir son las siguientes

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (10.35)$$

$$-\nabla\phi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (10.36)$$

Pensemos en el caso del potencial vector. Hemos conseguido el campo deseado especificando tan solo su rotacional, y sin tener que decir nada de su divergencia, por lo que en principio su divergencia puede ser cualquier cosa y este potencial seguirá cumpliendo su propósito. Esto no debería resultar chocante, ya que ya hemos visto que el potencial vector no es único, sino que, para cualquier función escalar ξ , podemos construir un nuevo potencial vector

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\xi \quad (10.37)$$

Cuyo rotacional seguirá siendo el campo magnético

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla\xi) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad (10.38)$$

Sin embargo, el potencial vector también aparece en el gradiente de ϕ , así que tenemos que reconciliar esto de alguna manera. Para hacerlo, definimos los siguientes potenciales alternativos

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\xi \quad (10.39)$$

$$\phi' = \phi + \alpha \quad (10.40)$$

Buscamos que se cumplan las siguientes expresiones

$$\nabla \times \vec{A}' = \vec{B} \quad (10.41)$$

$$-\nabla\phi' = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} \quad (10.42)$$

Sabemos que la primera de estas condiciones está garantizada por el hecho de que el rotacional de un gradiente es nulo, como acabamos de ver. Centrémonos pues en la segunda condición, que sustituyendo los valores de ϕ' y \vec{A}' toma la siguiente forma

$$-\nabla\phi - \nabla\alpha = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial\nabla\xi}{\partial t} \quad (10.43)$$

Sabemos la condición que cumplía el potencial escalar inicial $\left(-\nabla\phi = \vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$. Sustituyendo esta expresión

$$-\nabla\alpha = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\xi) \quad (10.44)$$

De donde se deduce que

$$\nabla\left(\alpha + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right) = 0 \quad (10.45)$$

El término entre paréntesis no puede depender de la posición (ya que su gradiente es nulo). Sin embargo si que podría ser igual a una función que dependa del tiempo, $\kappa(t)$, de donde se deduce que

$$\alpha = \kappa(t) - \frac{\partial\xi}{\partial t} \quad (10.46)$$

Ahora vamos a definir la siguiente función

$$\lambda \equiv \xi - \int_0^t \kappa(t') dt' \quad (10.47)$$

Si calculamos su derivada temporal

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial t} - \kappa(t) \quad (10.48)$$

Con lo cual podemos decir que

$$\alpha = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad (10.49)$$

Por otro lado, como la función $\kappa(t)$ no depende de la posición, el gradiente de λ será

$$\nabla\lambda = \nabla\xi - \nabla\int_0^t \kappa(t') dt' = \nabla\xi \quad (10.50)$$

Por lo tanto, podemos expresar estos nuevos potenciales en función de $\lambda(\vec{r}, t)$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \quad (10.51)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad (10.52)$$

Es decir, que siempre que contemos con un campo electromagnético descrito por unos potenciales \vec{A} y ϕ , podemos "inventar" unos nuevos potenciales a través de una función escalar. A esto se lo conoce como una transformación gauge, y nos permite ajustar los valores de la divergencia de \vec{A} sin modificar el hecho de que $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$. Veamos dos de las transformaciones gauge más utilizadas.

10.4.1. Gauge de Coulomb

La condición gauge de coulomb es ajustar de divergencia del potencial vector a cero

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (10.53)$$

Aplicando este gauge, la ecuación general para el potencial escalar (10.34) toma una forma simple, la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (10.54)$$

Sin embargo, la ecuación para el potencial vector se vuelve bastante complicada

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{J} - \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (10.55)$$

Por esta razón, y por otra que veremos a continuación, se suele trabajar con el gauge de Lorenz.

10.4.2. Gauge de Lorenz

En este caso, fijaremos la divergencia de \vec{A} a algo más complejo

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (10.56)$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones 10.31 y 10.34, llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{J} \quad (10.57)$$

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (10.58)$$

Usar este gauge tiene unas consecuencias bastante convenientes, y es que trata al potencial escalar y al potencial vector a través del mismo operador diferencial, el d'Alembertiano, que se define como

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (10.59)$$

Y las ecuaciones para el potencial vector y el potencial escalar en función de este d'Alembertiano serán

$$\square^2 \vec{A} = \mu\vec{J} \quad (10.60)$$

$$\square^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (10.61)$$

Otra de las ventajas de utilizar este gauge es que describe los potenciales como ondas que se propagan a una velocidad de propagación, u_p , dada por

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \quad (10.62)$$

Que coincide con la velocidad de la luz en un determinado medio.

Ahora, imaginemos que contamos con un potencial vector \vec{A} y un potencial escalar ϕ que describen unos ciertos campos electromagnéticos, pero que no cumplen la condición gauge de Lorenz. Veamos como podemos generar unos nuevos potenciales que describan los mismos campos, pero que si cumplen la condición de Lorenz. Ya sabemos que para definir unos nuevos potenciales, si queremos que describan los mismos campos, tendremos que hacerlo de la siguiente manera

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \xi \quad (10.63)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (10.64)$$

Como queremos que los nuevos potenciales cumplan el gauge de Lorenz, tendrá que darse la siguiente igualdad

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial t} \quad (10.65)$$

Sustituyendo las definiciones de los nuevos potenciales

$$\nabla \cdot \vec{A} + \nabla^2 \xi + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.66)$$

Reorganizando términos llegamos a la siguiente ecuación de ondas inhomogénea

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \nabla^2 \xi = \left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (10.67)$$

Resolviendo esta ecuación podemos hallar la función ξ adecuada para que los nuevos potenciales satisfagan la condición de Lorenz. Como apunte, es importante darse cuenta de que el término inhomogéneo de esta ecuación está muy relacionado con el gauge de Lorenz, ya que si los potenciales \vec{A} y ϕ cumplían la condición gauge, la ecuación de ondas para ξ será homogénea

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \nabla^2 \xi = 0 \quad (10.68)$$

10.5. Soluciones a la ecuación de ondas. Potenciales retardados.

Consideremos la ecuación de onda inhomogénea para el potencial escalar (utilizando el gauge de Lorenz)

$$\square^2 \phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (10.69)$$

Vamos a obtener la solución a esta ecuación de ondas. Para ello, pongámonos primero en un caso simple. Situémonos en un punto lo suficientemente alejado de nuestra distribución de carga $\rho_v(\vec{r}, t)$, de manera que podemos asumir que esta es nula, y que tenemos simetría esférica ($\phi = \phi(R, t)$). Así pues, la ecuación que tenemos que resolver es la forma homogénea de la ecuación de ondas

$$\square^2 \phi = 0 \quad (10.70)$$

Que desarrollando el d'Alembertiano en coordenadas esféricas, y considerando que ϕ no depende de θ o φ

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (10.71)$$

Para encontrar la solución a esta ecuación, vamos a expresar el potencial de la siguiente manera

$$\phi = \frac{1}{R} u(R, t) \quad (10.72)$$

De esta manera, aplicando la regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R^2} \quad (10.73)$$

Y la otra derivada de interés

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial u}{\partial R} - u \right) = \frac{\partial u}{\partial R} + R \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{\partial u}{\partial R} = R \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} \quad (10.74)$$

La derivada temporal será

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{R} u \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10.75)$$

Sustituyendo todo en la ecuación diferencial, llegamos a que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (10.76)$$

Esta es una ecuación de ondas homogénea, y su solución general es una función u tal que

$$u = u(t - \sqrt{\mu\epsilon}R) \quad (10.77)$$

Esto es sencillo de comprobar. Para mayor comodidad, sea

$$\eta \equiv t - \sqrt{\mu\epsilon}R \quad (10.78)$$

Utilizando la regla de la cadena, llegamos a que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (10.79)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (10.80)$$

Y se comprueba inmediatamente que la función $u(\eta)$ es una solución de esa ecuación. Así pues, podremos construir el potencial escalar como

$$\phi = \frac{1}{R} u(t - \sqrt{\mu\epsilon}R) \quad (10.81)$$

Así que tan solo nos queda encontrar la función u adecuada. Sin embargo, antes de hacer esto dediquemos un momento a pensar en lo que está ocurriendo. La dependencia temporal del potencial que hemos obtenido es bastante reveladora, ya que la cantidad $\sqrt{\mu\epsilon}R$ es el tiempo que tarda algo que se propaga con velocidad $(\mu\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$ en recorrer una distancia R . La función u está "retardada en el tiempo".

Para encontrar el significado físico de este retardo, pensemos en la dependencia temporal de ρ_v . Si algo cambia en la fuente, es evidente que también cambiará el campo. Sin embargo, la información no viaja de forma instantánea, ya que la teoría de la relatividad impone que la velocidad máxima es la de la luz. Si recordamos que $(\mu\epsilon)^{-\frac{1}{2}}$ es la velocidad de la luz en un determinado medio, la interpretación está clara. El retardo se debe a que los cambios en las fuentes no se transmiten de forma instantánea, sino que en un momento t , el potencial en un punto es el generado por las fuentes en un instante anterior.

Ahora vamos a obtener la solución completa. Para ello, volvamos por un momento a la solución electrostática, donde el potencial ϕ vendría dada por

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (10.82)$$

Donde τ es el volumen ocupado por la distribución de carga. Sería razonable pensar que la solución en el caso general será la misma, pero evaluando la densidad de carga en el tiempo retardado para modelar el hecho de que los cambios en la densidad de carga tardan más en notarse cuanto más lejos estemos de la distribución de carga. La expresión para el potencial sería

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|\sqrt{\mu\epsilon})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (10.83)$$

Donde ya hemos abandonado la simetría esférica, por lo que el factor R que teníamos en el caso simétrico se convierte en $|\vec{r}' - \vec{r}'|$, la distancia entre el punto fuente y el punto campo. Para comprobar que estos argumentos son correctos, demostraremos que este potencial cumple la ecuación de ondas inhomogénea para el potencial escalar. Para ello, definimos el tiempo retardado, λ , como

$$\lambda \equiv t - |\vec{r}' - \vec{r}'| \sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.84)$$

Serán necesarias las siguientes relaciones, que salen de aplicar la regla de la cadena

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial r} = -\sqrt{\mu\epsilon} \frac{\partial \rho_v}{\partial \lambda} \quad (10.85)$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \frac{\partial \rho_v}{\partial \lambda} \quad (10.86)$$

Por último denotaremos las derivadas temporales de ρ_v de la siguiente manera

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \equiv \dot{\rho}_v \quad (10.87)$$

Empecemos entonces calculando el gradiente del potencial

$$\nabla \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}', \lambda) dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \nabla \left(\frac{\rho_v(\vec{r}', \lambda) dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right) \quad (10.88)$$

Ahora, utilizando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla (FG) = F\nabla G + G\nabla F \quad (10.89)$$

Podemos escribir el gradiente del potencial como

$$\nabla \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \nabla \rho_v + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \rho_v \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right) dv' \quad (10.90)$$

Trabajando en coordenadas esféricas, los gradientes que buscamos son

$$\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\hat{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^2} \quad (10.91)$$

$$\nabla \rho_v = \hat{r} \frac{\partial \rho_v}{\partial r} = -\hat{r} \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\partial \rho_v}{\partial \lambda} = -\hat{r} \dot{\rho}_v \sqrt{\mu\epsilon} \quad (10.92)$$

Con lo cual tendremos que

$$\nabla \phi = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_{\tau} \frac{\dot{\rho}_v \hat{r} dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\rho_v \hat{r} dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^2} \quad (10.93)$$

Queremos llegar al laplaciano del potencial escalar. Para ello tan solo hay que tomar la divergencia de ambos miembros de la ecuación anterior

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \int_{\tau} \nabla \cdot \left(\frac{\dot{\rho}_v(\vec{r}', \lambda) \hat{r} dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \nabla \cdot \left(\frac{\rho_v(\vec{r}', \lambda) \hat{r} dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}'|^2} \right) \quad (10.94)$$

Ahora vamos a utilizar de nuevo una identidad vectorial

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = f\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla f \quad (10.95)$$

Esto nos permite expandir cada una de las dos integrales que aparecen en el laplaciano. Empezando por la primera

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \left(\frac{\dot{\rho}_v(t, \lambda) \hat{r} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \int_{\tau} \dot{\rho}_v \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' + \int_{\tau} \frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \nabla \dot{\rho}_v dv' \quad (10.96)$$

Ahora, utilizando que

$$\nabla \dot{\rho}_v = -\hat{r} \ddot{\rho}_v \sqrt{\mu \epsilon} \quad (10.97)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (10.98)$$

Llegamos a que

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \left(\frac{\dot{\rho}_v(t, \lambda) \hat{r} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \int_{\tau} \frac{\dot{\rho}_v dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} - \sqrt{\mu \epsilon} \int_{\tau} \frac{\ddot{\rho}_v dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.99)$$

Utilizando la misma identidad vectorial, podemos escribir la segunda integral que aparece en el laplaciano como

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \left(\frac{\rho_v \hat{r} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) = \int_{\tau} \rho_v \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) dv' + \int_{\tau} \frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \nabla \rho_v dv' \quad (10.100)$$

Ahora, vamos a utilizar los siguientes resultados²

$$\nabla \rho_v = -\hat{r} \dot{\rho}_v \sqrt{\mu \epsilon} \quad (10.101)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (10.102)$$

Para poder escribir la integral como

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \left(\frac{\rho_v \hat{r} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \right) = 4\pi \int_{\tau} \rho_v \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dv' \sqrt{\mu \epsilon} \int_{\tau} \frac{\dot{\rho}_v dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (10.103)$$

Ahora, sustituyendo 10.100 y 10.103 en 10.94, y cancelando términos, obtenemos la siguiente expresión para el laplaciano del potencial escalar

$$\nabla^2 \phi = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\ddot{\rho}_v(\vec{r}', \lambda) dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau} \rho_v(\vec{r}', \lambda) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') dv' \quad (10.104)$$

Evaluando la segunda integral

$$\nabla^2 \phi = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\ddot{\rho}_v(\vec{r}', \lambda) dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\rho_v(\vec{r}, t)}{\epsilon} \quad (10.105)$$

Merece la pena pararse un momento a explicar por que ha desaparecido la dependencia del tiempo retardado de ρ_v . Esto se debe a una de las propiedades de la delta de Dirac, recogida en la ecuación 2.79

$$\rho_v(\vec{r}', t - \sqrt{\mu \epsilon} |\vec{r} - \vec{r}'|) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \rho_v(\vec{r}, t - \sqrt{\mu \epsilon} |\vec{r} - \vec{r}'|) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (10.106)$$

Y por lo tanto

$$\rho_v(\vec{r}', t - \sqrt{\mu \epsilon} |\vec{r} - \vec{r}'|) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \rho_v(\vec{r}, t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (10.107)$$

²Para ver una demostración del segundo resultado, consultar la sección sobre la delta de Dirac.

Volviendo al laplaciano, expresando de forma explícita las derivadas temporales, y multiplicando y dividiendo el primer sumando por ϵ , tenemos que

$$\nabla^2 \phi = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{\tau} \frac{\rho_v(\vec{r}', \lambda) dv'}{4\pi\epsilon|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\rho_v(\vec{r}, t)}{\epsilon} \quad (10.108)$$

Si ahora recordamos la ecuación 10.83, podemos identificar la integral sobre la que actúan las derivadas temporales con la propia función ϕ , llegando a que

$$\nabla^2 \phi = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\rho_v(\vec{r}, t)}{\epsilon} \quad (10.109)$$

De donde se deduce inmediatamente que

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \square^2 \phi = -\frac{\rho_v(\vec{r}, t)}{\epsilon} \quad (10.110)$$

Y queda demostrado que este potencial escalar cumple la ecuación de ondas inhomogénea.

Utilizando exactamente los mismos argumentos, se puede llegar a una solución de la ecuación de ondas inhomogénea para el potencial vector. No debería sorprender su similitud con la expresión para el potencial escalar

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J}(\vec{r}', \lambda) dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.111)$$

Para terminar esta sección, habría que demostrar que las soluciones a las que hemos llegado cumplen la condición gauge de Lorenz, ya que para obtenerlas nos hemos basado en la ecuación de ondas que obtuvimos al imponer dicho gauge. Demostrar esto resulta algo más complicado³, así que no lo incluiremos en esta sección.

10.6. Fasores

Vamos a introducir la llamada notación fasorial, que será muy útil de aquí en adelante para describir cantidades oscilatorias en el tiempo. Para motivarla, empecemos considerando una intensidad sinusoidal $i(t)$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.112)$$

Ahora, vamos a introducir la siguiente notación para la unidad compleja⁴

$$j \equiv \sqrt{-1} \quad (10.113)$$

Usando esta notación y las propiedades de la exponencial compleja, podemos expresar la intensidad $i(t)$ de la siguiente manera

$$i(t) = \text{Re} \left[I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \right] \quad (10.114)$$

Podemos separar la dependencia temporal del módulo y la fase

$$i(t) = \text{Re} \left[I_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right] \quad (10.115)$$

La cantidad $I_0 e^{j\varphi}$ es el fasor que representa a la intensidad $i(t)$. En general, un fasor es una función compleja que puede depender de la posición, pero no del tiempo, y que representa

³Referencia/pon un apéndice

⁴La razón para esta elección lamentable es que los ingenieros no son capaces de seguir un convenio

la amplitud y la fase de una señal sinusoidal. Si $F(\vec{r}) \in \mathbb{C}$ es un fasor, y $i_F(\vec{r}, t)$ es la señal asociada a dicho fasor, estas dos cantidades se relacionan a través de la siguiente expresión.

$$i_F(\vec{r}, t) = \text{Re} [F(\vec{r}) e^{j\omega t}] \quad (10.116)$$

Es importante destacar que, cuando hablamos de fasores, damos por hecho que la dependencia temporal de nuestras funciones es tan solo de la forma $\cos(\omega t + \varphi)$, donde la frecuencia ω es conocida.

10.6.1. Derivadas e integrales en notación fasorial

Pensemos en la derivada temporal de la intensidad $i(t)$

$$\frac{\partial i}{\partial t} = -I_0\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (10.117)$$

Que, si queremos expresarlo en relación a un coseno

$$\frac{\partial i}{\partial t} = I_0\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.118)$$

Utilizando la exponencial compleja, podemos expresar la derivada de la intensidad como

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \text{Re} [I_0\omega e^{j\varphi} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}] \quad (10.119)$$

Ahora comparemos los fasores que describen la señal original (I) y su derivada (\dot{I})

$$I = I_0 e^{j\varphi} \quad (10.120)$$

$$\dot{I} = I_0\omega e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} = j\omega I \quad (10.121)$$

Se puede ver entonces que el fasor que describe la derivada temporal de una cantidad es igual al fasor que describe la cantidad inicial multiplicado por $j\omega$.

Pensemos ahora en la integral de la señal $i(t)$

$$\int i(t) dt = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t - \varphi) \quad (10.122)$$

Que, expresado en términos de un coseno

$$\int i(t) dt = \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (10.123)$$

O, en notación en términos de la exponencial compleja

$$\int i(t) dt = \text{Re} \left[\frac{I_0}{j\omega} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right] \quad (10.124)$$

Comparando de nuevo el fasor que representa la señal original (I) con el que representa la integral de la señal (\tilde{I})

$$I = I_0 e^{j\varphi} \quad (10.125)$$

$$\tilde{I} = \frac{I_0}{j\omega} e^{j\varphi} = \frac{I}{j\omega} \quad (10.126)$$

Por lo tanto, el fasor que representa la integral de una cantidad es el fasor que representa dicha cantidad, dividido entre $j\omega$.

Estas dos propiedades, sobre todo la de la derivada, serán muy útiles siempre que tratemos con fasores.

10.6.2. Ecuaciones de Maxwell en notación fasorial

Si estamos en una situación en la que sabemos que los campos electromagnéticos dependen del tiempo de forma sinusoidal, podemos expresarlos en función de fasores

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[\vec{E}(x, y, z) e^{j\omega t} \right] \quad (10.127)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[\vec{H}(x, y, z) e^{j\omega t} \right] \quad (10.128)$$

Donde $\vec{E}(x, y, z)$ y $\vec{H}(x, y, z)$ son los fasores que describen el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente. Si ahora pensamos en las ecuaciones de Maxwell, podemos reemplazar los campos por sus correspondientes fasores y sustituir las derivadas con respecto al tiempo por $j\omega$, para llegar al siguiente sistema de ecuaciones (considerando siempre medios l.h.i)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \end{array} \right. \quad (10.129)$$

Donde ahora las funciones \vec{E} y \vec{H} son fasores independientes del tiempo. Al resolver estas ecuaciones, para obtener las dependencias temporales no habrá más que multiplicar los fasores obtenidos por $e^{j\omega t}$ y tomar la parte real.

También podemos aplicar esto a las ecuaciones de onda homogéneas para los campos electromagnéticos (ecuaciones 10.16 y 10.20). Sustituyendo las derivadas temporales por los factores adecuados, llegamos a las siguientes ecuaciones para los fasores

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon\omega^2 \vec{E} = 0 \quad (10.130)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon\omega^2 \vec{B} = 0 \quad (10.131)$$

Si ahora definimos el número de ondas, k , como

$$k \equiv \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{u_p} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.132)$$

Donde u_p es la velocidad de propagación de la onda y λ la longitud de onda, podemos escribir las ecuaciones de onda para los fasores de forma mucho más compacta

$$\nabla^2 \vec{E} - k^2 \vec{E} = 0 \quad (10.133)$$

$$\nabla^2 \vec{B} - k^2 \vec{B} = 0 \quad (10.134)$$

Al igual que con las ecuaciones de onda para los campos, siempre que resolvamos una ecuación de onda para los fasores, tendremos que comprobar que el resultado satisface la forma fasorial de las ecuaciones de Maxwell.

10.6.3. Potenciales cuasiestacionarios

Pensemos en los potenciales retardados descritos por las ecuaciones 10.83 y 10.111. Si las fuentes de ambos campos (las corrientes y las densidades de carga) son armónicas (su valor oscila con una frecuencia ω), podremos escribirlas como

$$\rho_v(\vec{r}', \lambda) = \text{Re} \left[\rho_v(\vec{r}') e^{j\omega\lambda} \right] = \text{Re} \left[\rho_v(\vec{r}') e^{j(\omega t - k|\vec{r} - \vec{r}'|)} \right] \quad (10.135)$$

$$\vec{J}(\vec{r}', \lambda) = \text{Re} \left[\vec{J}(\vec{r}') e^{j\omega\lambda} \right] = \text{Re} \left[\vec{J}(\vec{r}') e^{j(\omega t - k|\vec{r} - \vec{r}'|)} \right] \quad (10.136)$$

Recordemos que λ es el tiempo retardado (ecuación 10.84) y k el número de ondas. Ahora, consideremos la expansión en serie de Taylor de la exponencial en torno a $k|\vec{r} - \vec{r}'| = 0$

$$e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|} = 1 - jk|\vec{r} - \vec{r}'| + \frac{k^2|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{2} + \dots \quad (10.137)$$

Si ahora suponemos que $k|\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1$, podemos hacer la siguiente aproximación

$$e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx 1 \quad (10.138)$$

Veamos lo que implica hacer esta aproximación

$$k|\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1 \implies \frac{2\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}{\lambda} \ll 1 \implies |\vec{r} - \vec{r}'| \ll \lambda \quad (10.139)$$

Es decir, estamos considerando que la distancia entre el punto en el que medimos el potencial y las fuentes es muy pequeña comparada con la longitud de onda. Bajo esta aproximación, los potenciales retardados se pueden escribir como

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau} \frac{\text{Re} \left[\rho_v(\vec{r}') e^{j\omega t} \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (10.140)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\text{Re} \left[\vec{J}(\vec{r}') e^{j\omega t} \right]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (10.141)$$

Vemos que ya no están evaluados en el tiempo retardado, sino que dependen del tiempo a secas. Esto se debe a la aproximación que estamos haciendo. Si el punto donde medimos está muy cerca de la fuente, y como las perturbaciones se propagan a la velocidad de la luz, podemos ignorar este retardo.

Estos potenciales aproximados que no dependen del tiempo retardado se llaman potenciales cuasiestacionarios, y son de gran utilidad en la teoría de circuitos, donde, al trabajar con circuitos de dimensiones despreciables en comparación con la longitud de onda de los campos electromagnéticos, podemos considerar que estos campos se propagan de forma instantánea.

10.7. Teorema de Poynting

Consideremos un volumen fijo τ en el que existan campos electromagnéticos. Sabemos que la energía electromagnética disipada en forma de calor por unidad de tiempo en dicho volumen (efecto Joule), a la que llamaremos \dot{W} , vendrá dada por

$$\dot{W} = \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} dv \quad (10.142)$$

Ahora, de las ecuaciones de Maxwell, sabemos que la corriente se puede expresar como

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (10.143)$$

Sustituyendo esta en la expresión para la energía disipada, llegamos a la siguiente ecuación

$$\dot{W} = \int_{\tau} \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) dv - \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv \quad (10.144)$$

Ahora vamos a utilizar la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad (10.145)$$

Que nos permite escribir la energía disipada como

$$\dot{W} = \int_{\tau} \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) dv - \int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv - \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv \quad (10.146)$$

Ahora, en la primera integral vamos a sustituir el valor de $\nabla \times \vec{E}$ dado por las ecuaciones de Maxwell, y en la segunda utilizaremos el teorema de la divergencia

$$\dot{W} = - \int_{\tau} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dv - \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} - \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dv \quad (10.147)$$

Donde S es la superficie que limita el volumen τ . Reorganizando términos, llegamos a la expresión general del teorema de Poynting

$$- \int_{\tau} \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv = \dot{W} + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \quad (10.148)$$

Y si ahora definimos el vector de Poynting, \vec{S} , como

$$\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H} \quad (10.149)$$

El teorema toma la forma

$$- \int_{\tau} \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv = \dot{W} + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} \quad (10.150)$$

10.7.1. Medios l.h.i

La interpretación física del teorema de Poynting se ve mucho mejor en los medios l.h.i, donde podemos escribir

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (10.151)$$

Ahora, utilizando la regla de la cadena, se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{E}) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (10.152)$$

Combinando las dos últimas expresiones, llegamos a que, para medios l.h.i

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \left(\vec{E} \cdot \vec{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) \quad (10.153)$$

Usando exactamente el mismo razonamiento, se puede demostrar que

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu} B^2 \right) \quad (10.154)$$

Si recordamos las expresiones 4.22 y 9.62, podemos expresar el teorema de Poynting en términos de las densidades de energía eléctrica y magnética

$$- \int_{\tau} \left(\frac{\partial w_m}{\partial t} + \frac{\partial w_e}{\partial t} \right) dv = \dot{W} + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} \quad (10.155)$$

Ahora, como la frontera del volumen τ no depende del tiempo, podemos sacar la derivada temporal de la integral

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} (w_e + w_m) dv = \dot{W} + \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{s} \quad (10.156)$$

De esta forma, el significado del teorema de Poynting queda más claro. En el lado izquierdo de la ecuación, tenemos la disminución de energía electromagnética total en un determinado volumen. En el lado derecho tenemos la energía disipada en el interior de ese volumen por pérdidas térmicas (el efecto Joule), además de un término adicional, el flujo del vector de Poynting a través de la superficie frontera del volumen en cuestión.

Entonces, el vector de Poynting tiene que estar relacionado con la energía transmitida por unidad de tiempo y de superficie por un determinado campo, es decir, el vector de Poynting es el flujo de potencia asociado a un campo electromagnético. De esta manera, si S es una superficie cualquiera

$$\int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{dW}{dt} \right)_{\text{A través de } S} \quad (10.157)$$

Y el teorema de Poynting no es más que la expresión de la conservación de la energía.

10.8. Ondas electromagnéticas planas

Las ondas planas son una solución particular a las ecuaciones de Maxwell. Si los campos electromagnéticos tienen esta forma, dichos campos se propagarán en una determinada dirección, y serán constantes en los planos infinitos perpendiculares a dicha dirección de propagación, es decir, los campos no vibrarán en la dirección en la que se propagan.

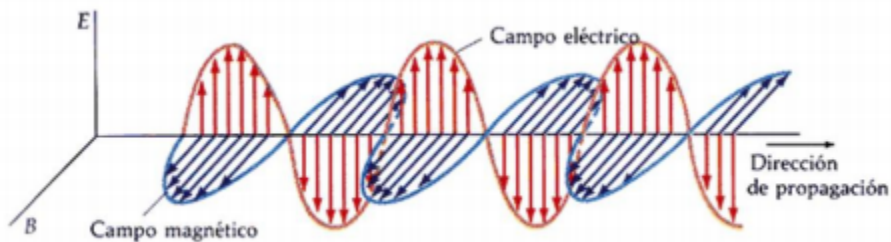


Figura 10.1: Onda electromagnética plana linealmente polarizada. Como se puede ver los campos electromagnéticos vibran de forma sinusoidal, pero de manera que si tomamos un corte perpendicular a la dirección de propagación, el campo será constante. El hecho de que los campos \vec{E} y \vec{B} sean perpendiculares no es casual, como veremos más adelante.

Veamos como podemos obtener estas soluciones a las ecuaciones de Maxwell. En primer lugar, buscamos soluciones armónicas, que varíen en el tiempo de forma sinusoidal, por lo que conviene usar la forma fasorial de la ecuación de ondas. Empecemos por el campo eléctrico

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (10.158)$$

Es importante destacar que estamos utilizando la forma homogénea de la ecuación de ondas, así que estamos asumiendo que estamos muy lejos de las distribuciones de carga y que trabajamos con medios l.h.i de conductividad nula. Esto no es una mala aproximación, ya que la mayoría de las ondas electromagnéticas que observamos están muy lejos de sus fuentes (por ejemplo, la luz que nos llega del sol, o la señal de una antena que se encuentra en otra ciudad). Para solucionar la ecuación asumiremos, sin pérdida de generalidad, que el campo

eléctrico se propaga en la dirección del eje z. Asumiremos también que $\vec{E} = E_x \hat{x}$, es decir, una onda linealmente polarizada⁵. De esta manera, la ecuación para la componente E_x será

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \quad (10.159)$$

Ahora, la condición de onda plana exige que el campo no puede depender de las coordenadas x e y, ya que \vec{E} es constante en los planos perpendiculares a la dirección de propagación. Así pues

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (10.160)$$

Y la ecuación de ondas para el fasor será

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (10.161)$$

La solución a esta ecuación diferencial se puede escribir en términos de la exponencial compleja

$$E_x(z) = A e^{jkz} + B e^{-jkz} \quad (10.162)$$

Donde A y B son números complejos, que podemos expresar como un módulo multiplicado por una fase

$$A = E_- e^{j\varphi} \quad (10.163)$$

$$B = E_+ e^{j\delta} \quad (10.164)$$

Donde E_+ y E_- son números reales. El fasor que representa la onda será

$$\vec{E}(z) = E_- e^{j(kz+\varphi)} \hat{x} + E_+ e^{j(-kz+\delta)} \hat{x} \quad (10.165)$$

Ahora, para obtener la expresión dependiente del tiempo

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left[\vec{E}(z) e^{j\omega t} \right] \quad (10.166)$$

Que, explícitamente

$$\vec{E}(z, t) = E_- \cos(\omega t + kz + \varphi) \hat{x} + E_+ \cos(\omega t - kz + \delta) \hat{x} \quad (10.167)$$

Vemos entonces que la solución es un campo eléctrico que vibra en el eje x y que se propaga en dirección -z (acompañado por el coeficiente E_-), y otro que vibra en la misma dirección que se propaga en la dirección +z (acompañado por el coeficiente E_+), que pueden o no estar en fase, dependiendo de las constantes φ y δ . Como estamos considerando propagación en dirección +z, nuestra solución será

$$\vec{E}(z, t) = E_+ \cos(\omega t - kz + \delta) \hat{x} \quad (10.168)$$

Ahora falta calcular el campo \vec{H} . Podríamos hacerlo utilizando el mismo método que para el campo eléctrico, pero es bastante más ilustrativo utilizar la forma fasorial de las ecuaciones de Maxwell, que nos dicen que

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (10.169)$$

Que nos permite obtener el campo \vec{H} a partir del rotacional del fasor que representa el campo eléctrico.

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E} \quad (10.170)$$

⁵Esto sí que implica cierta pérdida de generalidad, pero como veremos más adelante esta solución es suficiente para obtener el caso general.

Calculando el rotacional del fador campo eléctrico

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_+ e^{j(-kz+\delta)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -jkE_+ e^{j(-kz+\delta)} \hat{y} \quad (10.171)$$

Y el fador que representa el campo \vec{H} será

$$\vec{H}(z) = \frac{k}{\mu\omega} E_+ e^{j(-kz+\delta)} \hat{y} \quad (10.172)$$

Y el campo \vec{H} es

$$\vec{H}(z, t) = \frac{k}{\mu\omega} E_+ \cos(\omega t - kz + \delta) \hat{y} \quad (10.173)$$

Obtenemos una onda que se propaga también en la dirección $+z$, que vibra en fase con el campo eléctrico (es decir, en los valores de z para los que el módulo de \vec{E} es máximo, el módulo de \vec{H} también lo será, y lo mismo ocurre para los mínimos), y que vibra en un eje perpendicular al campo eléctrico, ya que este vibraba a lo largo del eje x y el campo \vec{H} vibra a lo largo del eje y , tal y como se observa en la figura 10.1.

Vamos a hacer una comprobación rápida. Las ecuaciones de ondas que se deducen de las ecuaciones de Maxwell predicen que los campos electromagnéticos se propagarán a la velocidad de la luz, por lo que nuestras soluciones deben reflejar esto. Fijémosnos en un punto concreto de una de nuestras ondas, es decir, fijemos la fase a constante

$$\omega t - kz + \delta = cte \implies z = \frac{-cte}{k} + \frac{\omega}{k} t \quad (10.174)$$

La velocidad de propagación de la onda vendrá dada por

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (10.175)$$

Donde hemos utilizado la definición del número de ondas dada por la ecuación 10.132. Como era de esperar, las ondas que obtenemos se propagan a la velocidad de la luz en un determinado medio.

10.8.1. Impedancia intrínseca

Recordemos las expresiones que hemos obtenido para los fasores que representan los campos \vec{E} y \vec{H} .

$$\vec{E}(z) = E_+ e^{j(-kz+\delta)} \hat{x} = E_x(z) \hat{x} \quad (10.176)$$

$$\vec{H}(z) = \frac{k}{\mu\omega} E_+ e^{j(-kz+\delta)} \hat{y} = \frac{k}{\mu\omega} E_x(z) \hat{y} \quad (10.177)$$

Ahora, definimos la impedancia intrínseca del medio, η

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (10.178)$$

Y por lo tanto, utilizando 10.132 podemos escribir el fador asociado al campo \vec{H} en función del campo eléctrico y de la impedancia intrínseca

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta} E_x(z) \hat{y} \quad (10.179)$$

10.8.2. Superposición de soluciones

Pensemos de nuevo en la forma fasorial de la ecuación de ondas para el campo eléctrico

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{E} = 0 \quad (10.180)$$

Supongamos que contamos con dos soluciones, \vec{E}_1 y \vec{E}_2 que solucionan la ecuación de ondas. Veamos que su suma también soluciona dicha ecuación

$$(\nabla^2 + k^2) (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = (\nabla^2 + k^2) \vec{E}_1 + (\nabla^2 + k^2) \vec{E}_2 = 0 + 0 = 0 \quad (10.181)$$

Supongamos pues que contamos con un conjunto de N fasores que representa ondas planas que se propagan en la misma dirección $\{\vec{E}_n\}$, de forma que todos ellos solucionan la ecuación de ondas. Si ahora $\{C_n\}$ es un conjunto de N números complejos, sabemos que el siguiente fasor

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N C_n \vec{E}_n \quad (10.182)$$

También será una solución de la ecuación de ondas. Además, como los fasores $\{\vec{E}_n\}$ representan ondas planas, el fasor \vec{E} también representará una onda plana que se propagará en la misma dirección que las ondas representadas por los fasores originales.

Ahora volvamos atrás un poco. Mientras solucionábamos la ecuación de ondas, hubo un momento en el que decidimos, de manera arbitraria, que el campo eléctrico vibraría a lo largo del eje x. Sin embargo, podríamos haber elegido que este campo vibrase a lo largo de un eje arbitrario⁶, caracterizado por un vector unitario al que llamaremos \hat{e} . Este vector, para el caso de la propagación a lo largo del eje z, se podrá escribir en coordenadas cartesianas como

$$\hat{e} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} \quad (10.183)$$

Donde α y β son números reales tales que

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (10.184)$$

Utilizando este hecho, podemos expresar nuestro fasor \vec{E} en función de estos vectores unitarios

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N C_n E_n \hat{e}_n \quad (10.185)$$

Donde los $\{\hat{e}_n\}$ son los vectores unitarios que indican el eje en el que vibran los campos descritos por los $\{\vec{E}_n\}$.

Tenemos entonces que podemos escribir los fasores que representan ondas planas que se propagan en una determinada dirección como una combinación lineal de fasores que representan campos que vibran a lo largo de un eje arbitrario, pero perpendicular a la dirección de propagación. La ventaja de hacer esto es que calcular el fasor intensidad de campo magnético es muy sencillo. En el apartado anterior hemos calculado el fasor campo \vec{H} asociado a un fasor \vec{E} que oscila a lo largo del eje x. Este era un fasor que oscila a lo largo del eje y y que se relaciona con el fasor \vec{E} a través de la impedancia intrínseca.

Es sencillo convencerse de que si realizamos el mismo cálculo con un fasor \vec{E} que vibre en un eje arbitrario, obtendremos un fasor \vec{H} que vibre en un eje perpendicular. Como las

⁶Podría pensarse que la decisión de elegir propagación en el eje z también es arbitraria, pero como podemos situar nuestros ejes como queramos, siempre podemos alinear el eje z con la dirección de propagación.

ecuaciones de Maxwell son lineales, podemos escribir el fasor que representa la intensidad de campo magnético asociada a $\vec{\mathcal{E}}$, que llamaremos $\vec{\mathcal{H}}$ de la siguiente manera

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^N C_n E_n \hat{k}_n \quad (10.186)$$

Donde los $\{\vec{k}_n\}$ son vectores unitarios que representan los ejes perpendiculares en los que vibrará cada uno de los campos representados por los fasores \vec{H} que estamos superponiendo. La condición que deben cumplir estos vectores unitarios es la siguiente

$$\hat{e}_n \times \hat{k}_n = \hat{z} \quad (10.187)$$

O lo que es lo mismo, si el vector \hat{e}_n viene dado por

$$\hat{e}_n = \alpha_n \hat{x} + \beta_n \hat{y} \quad (10.188)$$

Entonces su vector perpendicular asociado, \hat{k}_n , será

$$\hat{k}_n = -\beta_n \hat{x} + \alpha_n \hat{y} \quad (10.189)$$

Recordando que, para todo n, se cumple que

$$\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1 \quad (10.190)$$

Ya sabemos la forma de la función E_n , ya que sea cual sea el eje en el que vibra el campo, la condición de onda plana nos impone que, para todo n

$$\frac{\partial E_n}{\partial x} = \frac{\partial E_n}{\partial y} = 0 \quad (10.191)$$

Por lo que la ecuación diferencial para todas ellas será la misma, y por lo tanto las funciones E_n diferirán solo en el valor de las constantes de integración. Sabiendo esto, si contamos con una onda plana electromagnética que se propaga lejos de las fuentes, podremos escribir los fasores que representan los campos eléctrico y magnético como combinaciones lineales de ondas planas que vibran a lo largo de un único eje

$$\vec{E}(z) = \sum_{n=1}^N C_n e^{j(-kz + \delta_n)} \hat{e}_n \quad (10.192)$$

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^N C_n e^{j(-kz + \delta_n)} \hat{k}_n \quad (10.193)$$

Resumiendo. Sabemos que existe un tipo concreto de onda plana, cuyo campo eléctrico vibra sobre un único eje, y además sabemos que calcular el campo magnético asociado a esta onda es muy sencillo. Sabemos además que, como la ecuación de ondas es lineal, cualquier combinación lineal de soluciones es también una solución. Así pues, como contamos con un tipo de onda para la cual calcular \vec{H} es muy sencillo, podemos descomponer un fasor \vec{E} cualquiera en una suma de campos eléctricos que vibran en un solo eje. Ahora, como las ecuaciones de Maxwell son lineales, sabemos que el campo magnético asociado a esta superposición se puede obtener como la suma de los campos magnéticos asociados a cada uno de los términos de la superposición, que como ya sabemos, son sencillos de calcular.

Todo esto ha sido bastante denso, así que vamos a ver un tipo concreto de estas superposiciones, las ondas polarizadas.

10.8.3. Polarización de ondas planas

Pensemos en la siguiente superposición de ondas que vibran en un único eje (ondas linealmente polarizadas)

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(\omega t - kz) \hat{x} + E_2 \cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} \quad (10.194)$$

Antes de nada, veamos que esta onda es de la forma que hemos descrito en el apartado anterior. El fasor que la describe es

$$\vec{E}(z) = E_1 e^{-jkz} \hat{x} - jE_2 e^{-jkz} \hat{y} \quad (10.195)$$

Que es claramente de la forma descrita por la ecuación 10.192. Volviendo a la dependencia temporal, podemos escribir nuestra onda como

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(\omega t - kz) \hat{x} + E_2 \sin(\omega t - kz) \hat{y} \quad (10.196)$$

Pensemos en un plano arbitrario perpendicular al eje z (la dirección de propagación). Esto es equivalente a considerar la ecuación anterior para $z = z_0 = cte$. Tendremos entonces

$$\vec{E}(z_0, t) = E_1 \cos(\omega t - kz_0) \hat{x} + E_2 \sin(\omega t - kz_0) \hat{y} \quad (10.197)$$

Esta es la ecuación paramétrica de una elipse en este plano $z = z_0$. Ahora, si nos situamos en otro plano distinto ($z = z_1 = cte \neq z_0$), tendremos también la ecuación paramétrica de una elipse, y si dejamos que el tiempo transcurra, la elipse descrita será la misma. Así pues, en cada uno de los planos los vectores del campo eléctrico describirán la misma elipse.

Ahora pensemos en la forma del campo en un momento determinado ($t = t_0 = cte$). Tendremos la siguiente ecuación

$$\vec{E}(z, t_0) = E_1 \cos(\omega t_0 - kz) \hat{x} + E_2 \sin(\omega t_0 - kz) \hat{y} \quad (10.198)$$

Esta es la ecuación paramétrica de una hélice elíptica. Si miramos el campo en otro momento posterior, seguiremos viendo una hélice, pero "adelantada" con respecto a la anterior. Gráficamente

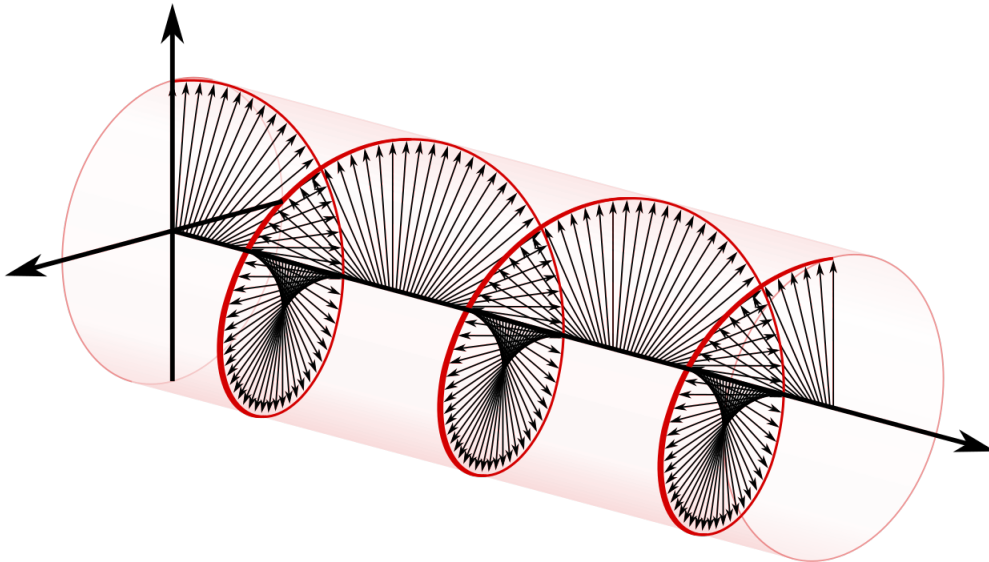


Figura 10.2: Caso particular de polarización elíptica, la polarización circular ($E_1 = E_2$).

Si quisiésemos calcular el fasor campo \vec{H} asociado a esta onda, tan solo habría que utilizar la ecuación 10.193 para llegar al siguiente resultado

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta} E_1 e^{-jkz} \hat{y} + \frac{1}{\eta} j E_2 e^{-jkz} \hat{x} \quad (10.199)$$

Tomando la dependencia temporal

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_2}{\eta} \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) \hat{x} + \frac{E_1}{\eta} \cos(\omega t - kz) \hat{y} \quad (10.200)$$

O, lo que es lo mismo

$$\vec{H}(z, t) = -\frac{E_2}{\eta} \sin(\omega t - kz) \hat{x} + \frac{E_1}{\eta} \cos(\omega t - kz) \hat{y} \quad (10.201)$$

Es decir, dado un campo \vec{E} elípticamente polarizado, el campo \vec{H} asociado también estará elípticamente polarizado, solo que desfasado con respecto al campo eléctrico.

En la siguiente figura se pueden ver los tres tipos de polarización más frecuentes

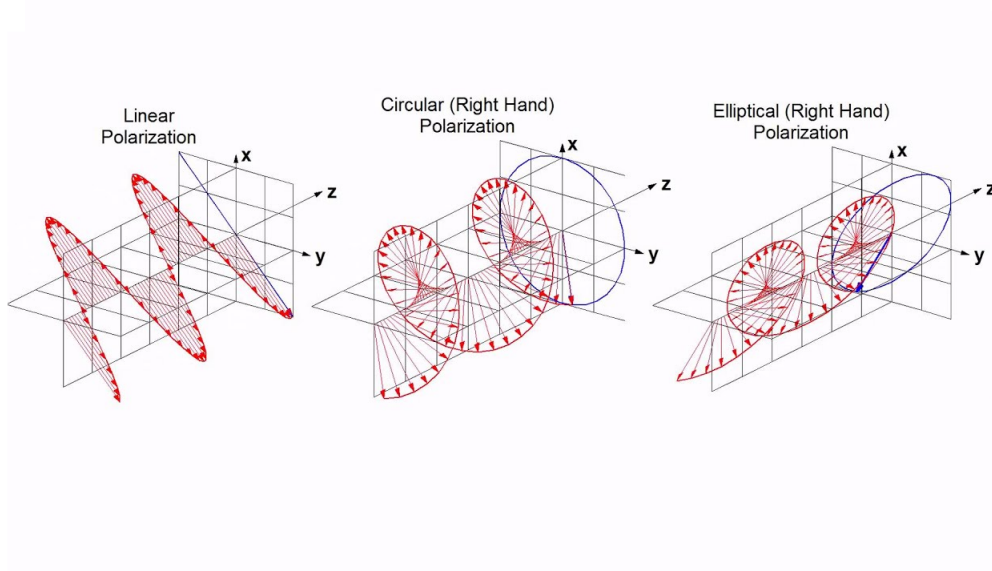


Figura 10.3: Polarizaciones lineales, circulares y elípticas. Los términos right-handed y left-handed se refieren a como los vectores del campo recorren la elipse con el tiempo.

10.9. Ondas planas en medios con pérdidas

Hasta ahora hemos trabajado con medios l.h.i de conductividad nula y sin fuentes (esto es lo que supone utilizar la forma homogénea de la ecuación de ondas fasorial). Dedicaremos este apartado a discutir los medios l.h.i sin fuentes, pero de conductividad no nula. En este caso, la forma fasorial de la ecuación para el rotacional de \vec{H} será

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E} \quad (10.202)$$

Utilizando la relación constitutiva $\vec{J} = \sigma\vec{E}$

$$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{E} \quad (10.203)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la igualdad por $j\omega$, llegamos a

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) j\omega \vec{E} \quad (10.204)$$

Si ahora definimos la permitividad compleja, ϵ_c

$$\epsilon_c \equiv \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (10.205)$$

A menudo, tomamos que $\epsilon \equiv \epsilon'$ y $\frac{\sigma}{\omega} \equiv \epsilon''$, de manera que

$$\epsilon_c \equiv \epsilon' - j\epsilon'' \quad (10.206)$$

Podemos expresar la ecuación fasorial como

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_c \vec{E} \quad (10.207)$$

Luego, para este tipo de medios, la forma fasorial de las ecuaciones de Maxwell será

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon_c \vec{E} \end{array} \right. \quad (10.208)$$

Tal y como hicimos en otros apartados, se pueden obtener ecuaciones de onda fasoriales de este conjunto de ecuaciones. El resultado es que se obtienen las mismas ecuaciones que para los medios l.h.i de conductividad nula, pero sustituyendo ϵ por ϵ_c . Las ecuaciones resultantes son

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \quad (10.209)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k_c^2 \vec{H} = 0 \quad (10.210)$$

Donde k_c es el número de ondas complejo, dado por

$$k_c = \omega \sqrt{\epsilon_c \mu} \quad (10.211)$$

Podría parecer extraño estar trabajando con una permitividad compleja, pero es tan solo un atajo para utilizar los resultados que hemos obtenido en apartados anteriores. Recordemos que al hablar de fasores, los números complejos dan una idea del desfase que tiene el campo asociado, por lo que el hecho de que la permitividad sea compleja no representa ningún problema.

Para resolver las ecuaciones de onda consideremos el caso de una onda linealmente polarizada a lo largo del eje x que se propaga en la dirección positiva del eje z . Ya resolvimos esa ecuación anteriormente, así que ahora simplemente utilizaremos esa solución sustituyendo k por k_c . Tendremos entonces que el fasor que describe el campo eléctrico será

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-jk_c z} \hat{x} \quad (10.212)$$

Ahora introduciremos la siguiente cantidad, conocida como constante de propagación

$$\gamma \equiv jk_c \in \mathbb{C} \quad (10.213)$$

Por ser la constante de propagación un número complejo, tendrá en general una parte real y una imaginaria. Si α y β son números reales, podremos escribir γ como

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (10.214)$$

Y el fasor que representa el campo eléctrico será

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-\gamma z} \hat{x} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{x} \quad (10.215)$$

De las ecuaciones de Maxwell, podemos obtener el campo como

$$\vec{H} = \frac{j}{\mu\omega} \nabla \times \vec{E} \quad (10.216)$$

Realizando los cálculos, llegamos a un resultado poco sorprendente

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\mu}} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{y} \quad (10.217)$$

Vemos que el fasor campo \vec{H} es idéntico al fasor campo eléctrico, salvo porque está orientado a lo largo del eje y, y por un factor multiplicativo. Para hacer más evidente la analogía con el caso de materiales de $\sigma = 0$, definimos la impedancia compleja del medio como

$$\eta_c \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = |\eta_c| e^{j\theta_\eta} \quad (10.218)$$

Podemos expresar entonces los fasores de los campos como

$$\vec{E}(z) = E(z) \hat{x} \quad (10.219)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta_c} E(z) \hat{y} \quad (10.220)$$

Es el mismo resultado que para cuando $\sigma = 0$, solo que ahora la impedancia es compleja, lo que implicará que existirá un desfase entre los campos eléctricos y magnéticos, debido a que la fase de la impedancia modificará el término en el interior del coseno al pasar a la dependencia temporal. Excepto este hecho, todo lo que era cierto en el apartado anterior (la superposición de soluciones, y las relaciones entre un fasor de campo eléctrico y su fasor de campo magnético asociado) sigue cumpliéndose.

Veamos entonces la solución a las ecuaciones de onda para estos medios

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{x} \quad (10.221)$$

$$\vec{H}(z) = \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{y} \quad (10.222)$$

Si ahora pasamos de los fasores a los campos dependientes del tiempo, tendremos que

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} \quad (10.223)$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \hat{y} \quad (10.224)$$

Veamos las diferencias con el caso en el que la conductividad es nula. En primer lugar, los campos ya no están en fase, sino que existe un desfase δ debido a que ahora la impedancia intrínseca del medio es número complejo. Sin embargo, lo más importante es que ha aparecido una exponencial decreciente delante. Esto significa que, a medida que la onda se va propagando, su amplitud decae exponencialmente⁷. Es decir, cuando una onda electromagnética penetra en un material de conductividad no nula, solo puede avanzar una determinada distancia hasta que su amplitud se vuelve despreciable⁸. Como el parámetro

⁷Estrictamente hablando, esto solo ocurre si $\alpha > 0$. Es sencillo demostrar que si exigimos que la permitividad sea un número real positivo, α ha de ser mayor que cero

⁸Esto es lo que se conoce como efecto piel. A la distancia para la cual la onda se ha atenuado en un factor e^{-1} , que resulta ser $\frac{1}{\alpha}$, se la conoce como profundidad de penetración.

α es el que rige esta atenuación, se le llama constante de atenuación. Por otro lado, como el parámetro β es el que controla la fase de la onda según penetra en el material, se lo conoce como constante de fase. Este parámetro además está relacionado con la velocidad de propagación de la onda. En efecto, si nos centramos en un punto de la onda que tenga una fase constante

$$\omega t - \beta z = cte \implies z = \frac{cte}{\beta} + \frac{\omega}{\beta} t \quad (10.225)$$

La velocidad de propagación, u_p será

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (10.226)$$

A continuación, veremos como aplicar este resultado general para dos casos extremos: los buenos conductores y los medios con pequeñas pérdidas.

10.9.1. Medios con pequeñas pérdidas

Un medio con pequeñas pérdidas es aquel en que los efectos de la conductividad no nula apenas se notan. Esto significa que ϵ_c está muy cerca de ser un número real. Mirando la forma de esta constante, llegamos a que la condición que debe de cumplirse es la siguiente

$$\epsilon'' \ll \epsilon' \implies \sigma \ll \omega \epsilon \quad (10.227)$$

Antes de nada, tenemos que darnos cuenta de que este comportamiento no es una característica intrínseca de cada material, ya que depende de la frecuencia de la onda incidente. Si para una frecuencia las aproximaciones que vamos a hacer son válidas, para una frecuencia mucho más baja ya no lo serán. Una vez entendido esto, vamos a calcular la constante de propagación γ

$$\gamma = jk_c = j\omega \sqrt{\mu \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\mu \epsilon}} \quad (10.228)$$

Ahora, utilizaremos el siguiente desarrollo en serie de Taylor. Para x lo suficientemente pequeño

$$\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \quad (10.229)$$

Identificando $x = j \frac{\sigma}{\mu \epsilon}$, podemos escribir

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 - \frac{j\sigma}{2\omega \epsilon} + \frac{\sigma^2}{8\omega^2 \epsilon^2} \right) \quad (10.230)$$

Y, en función de ϵ' y ϵ''

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 - j \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right) \quad (10.231)$$

De esta forma, podremos aproximar las constantes de atenuación y de fase por

$$\alpha = \text{Re}(\gamma) \approx \frac{\omega \epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (10.232)$$

$$\beta = \text{Im}(\gamma) \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right) \quad (10.233)$$

También se podría calcular la impedancia intrínseca compleja del medio

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon'} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10.234)$$

Ahora, utilizando el siguiente desarrollo de Taylor para x lo suficientemente pequeño

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \quad (10.235)$$

E identificando $x = -j \frac{\sigma}{\omega \epsilon'}$

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon'}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) \quad (10.236)$$

Que como podemos ver es un número complejo, así que los campos \vec{E} y \vec{H} estarán desfasados.

Quizá lo más intuitivo sea calcular la velocidad de propagación de la onda en este medio. Esta será

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right)^{-1} < \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (10.237)$$

Como se puede ver, es menor que la velocidad de propagación en un medio sin pérdidas, aunque no demasiado. Si se utiliza el desarrollo de Taylor para x pequeño

$$(1+x)^{-1} \approx 1 - x + x^2 \quad (10.238)$$

E identificamos $x = \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2$

$$u_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right) < \frac{1}{\mu \epsilon} \quad (10.239)$$

10.9.2. Buenos conductores

Como su nombre indica, estos materiales son aquellos que presentan un elevado valor de la conductividad, σ . En cuanto a la aproximación que consideramos, en términos de las partes real e imaginaria de la permitividad compleja, es la siguiente

$$\epsilon' \ll \epsilon'' \implies \sigma \gg \omega \epsilon \implies \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1 \quad (10.240)$$

Al igual que en el caso de los medios con pequeñas pérdidas, es importante darnos cuenta de que, como la frecuencia de la onda ω entra en nuestras aproximaciones, un medio no es buen conductor en general, sino que es una característica que depende de la onda que se propague por el mismo.

Veamos entonces lo que resulta de aplicar esta aproximación. Como ya sabemos, la constante de propagación viene dada, en general, por la siguiente expresión.

$$\gamma = jk_c = j\omega \sqrt{\mu \epsilon_c} = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \quad (10.241)$$

Ahora, utilizando nuestra aproximación

$$\gamma \approx j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{-j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}} \quad (10.242)$$

Que, simplificando, resulta ser

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\mu \omega \sigma}{2}} (1 + j) \quad (10.243)$$

Ahora podemos calcular las constantes de atenuación y de fase

$$\alpha = \operatorname{Re}(\gamma) \approx \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} \quad (10.244)$$

$$\beta = \operatorname{Im}(\gamma) \approx \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} \quad (10.245)$$

Vemos entonces que, para los buenos conductores, las constantes de fase y de atenuación, toman el mismo valor. Por otro lado, también podemos calcular la impedancia intrínseca compleja

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (10.246)$$

Ahora, utilizando nuestra aproximación, podemos escribir que

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(-j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{j\mu\omega}{\sigma}} \quad (10.247)$$

Que, haciendo cálculos, se puede emplear como

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} (1 + j) = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (10.248)$$

Luego, bajo la aproximación de buenos conductores, la fase de la impedancia es siempre de 45° . Juntando todo lo que hemos visto en este apartado, podemos escribir los fasores que representan los campos \vec{E} y \vec{H} (considerando polarización lineal a lo largo de ejes arbitrarios y propagación a lo largo del eje z) como

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z} e^{-j\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z} \hat{e} \quad (10.249)$$

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta_c} E(z) = E_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} e^{-\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z} e^{-j\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z} e^{-j\frac{\pi}{4}} \hat{k} \quad (10.250)$$

Donde hemos empleado la misma nomenclatura para los vectores que describen los ejes en los que vibran los campos que discutimos en el apartado sobre la polarización. Si ahora pasamos a los campos dependientes del tiempo

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z\right) \hat{e} \quad (10.251)$$

$$\vec{H}(z, t) = E_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} e^{-\sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}}z - \frac{\pi}{4}\right) \hat{k} \quad (10.252)$$

Finalmente, podemos calcular la velocidad de propagación de una onda electromagnética en estos medios

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (10.253)$$

Para tener algo más de intuición sobre el comportamiento de las ondas en estos materiales, podemos reescribir esto como

$$u_p \approx \sqrt{\frac{2\omega\epsilon}{\sigma}} \sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} \quad (10.254)$$

Y recordando que $\frac{1}{\mu\epsilon}$ es el cuadrado de la velocidad de la luz en un medio

$$u_p \approx \sqrt{\frac{2\omega\epsilon}{\sigma}} c \quad (10.255)$$

Ahora, para este tipo de medios estamos considerando que $\sigma \gg \omega\epsilon$, así que analizando la expresión anterior, podemos concluir que en los buenos conductores, las ondas electromagnéticas se propagan a una velocidad muy inferior a la de la luz.

10.10. Densidades de potencia instantánea y media

Como ya hemos visto, los campos \vec{E} y \vec{H} que solucionan la ecuación de ondas homogénea, y que forman ondas planas, se pueden escribir de la siguiente manera

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{e} \quad (10.256)$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \hat{k} \quad (10.257)$$

Donde estamos considerando propagación a lo largo del eje z y polarización lineal (ya sabemos que superponiendo varios campos linealmente polarizados podemos construir señales más complejas). Utilizando estos campos, podemos calcular el vector de Poynting

$$\vec{S}(z, t) = \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{|\eta_c|} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) (\hat{e} \times \hat{k}) \quad (10.258)$$

Si ahora recordamos la condición que tienen que cumplir los versores \hat{e} y \hat{k} , dada por la ecuación 10.187, tenemos que

$$\vec{S}(z, t) = \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{|\eta_c|} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \hat{z} \quad (10.259)$$

Luego el vector de Poynting apunta en la dirección en la que se propaga la onda. Si recordamos que el vector de Poynting es el flujo de potencia transmitida por el campo electromagnético, tiene bastante sentido que apunte en la dirección de propagación. Ahora, empleando la siguiente identidad

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \quad (10.260)$$

Podemos escribir el vector de Poynting como

$$\vec{S}(z, t) = \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2|\eta_c|} \hat{z} (\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)) \quad (10.261)$$

Esto es lo que se conoce como el valor instantáneo del vector de Poynting. Dado un instante determinado, podemos conocer el valor de este vector en todos los puntos del espacio. Sin embargo, ya que el vector de Poynting nos da una idea de la potencia que transmite el campo, en ocasiones es útil trabajar con el valor promedio de este vector, que se define como

$$\langle \vec{S} \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(z, t) dt \quad (10.262)$$

Donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el periodo de las ondas planas. Si realizamos la integral, llegamos a que el valor medio del vector de Poynting de una onda plana linealmente polarizada que se propaga en la dirección del eje z es

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2 e^{-2\alpha z}}{2|\eta_c|} \cos \theta_\eta \hat{z} \quad (10.263)$$

10.11. Caso general. Propagación en direcciones arbitrarias

Durante todo el desarrollo teórico, nos hemos basado en el hecho de que contamos con libertad a la hora de escoger nuestro sistema de ejes para simplificar el tratamiento de la propagación de ondas planas, ya que hemos asumido que estas se propagan siempre en la dirección del eje z . No obstante, si bien para desarrollar la teoría fijar la dirección de propagación es sencillo, existen muchos casos prácticos en los que, por un motivo u otro, queremos orientar nuestros ejes de una manera determinada que puede no ser la óptima para describir la onda.

Consideremos entonces un sistema de ejes cartesianos, XYZ, caracterizado por el conjunto de vectores unitarios $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Sea ahora \hat{p} un vector unitario que apunta en la dirección de propagación de la onda. Ahora podemos introducir un nuevo sistema de ejes cartesianos X'Y'Z', caracterizado por el conjunto de vectores unitarios $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$, tales que $\hat{p} = \hat{z}'$ (es decir, alineamos el eje Z' con la dirección en la que se propaga la onda). El sistema de ejes primados es con el que hemos estado trabajando durante todo el tema, por lo que podemos escribir los fasores que representan los campos \vec{E} y \vec{H} de una onda plana cualquiera como una superposición de ondas planas linealmente polarizadas.

$$\vec{E}(z') = \sum_{n=1}^N C_n e^{-z'(\alpha+j\beta)} \hat{e}_n \quad (10.264)$$

$$\vec{H}(z') = \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\eta_c} e^{-z'(\alpha+j\beta)} \hat{k}_n \quad (10.265)$$

Donde de nuevo, los $\{\hat{e}_n\}$ y $\{\hat{k}_n\}$ son los vectores unitarios que describen los ejes perpendiculares a la dirección de propagación. Recordemos que estos vectores han de cumplir que

$$\hat{e}_n \times \hat{k}_n = \hat{z}' = \hat{p} \quad \forall n \quad (10.266)$$

Ahora la pregunta es como deshacerse de esta dependencia de z' , y expresar estas soluciones en función de parámetros correspondientes al sistema de referencia sin primar. Para ello, pensemos en una manera alternativa de escribir z'

$$z' = \vec{r}' \cdot \hat{z}' \quad (10.267)$$

Donde \vec{r}' es el vector de posición referido al sistema de referencia primado. Ahora, como el producto escalar de dos vectores es independiente de la base en la que estén expresados, podemos escribir z' como

$$z' = \vec{r}' \cdot \hat{z}' = \vec{r}' \cdot \hat{p} \quad (10.268)$$

Donde \vec{r}' es el vector de posición referido al sistema de referencia sin primar.

Es decir, para un sistema de referencia cualquiera, podemos expresar una onda plana que se propaga en la dirección marcada por el vector unitario \hat{p} como una superposición de ondas linealmente polarizadas. En forma fasorial

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-(\vec{r} \cdot \hat{p})(\alpha+j\beta)} \hat{e}_n \quad (10.269)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\eta_c} e^{-(\vec{r} \cdot \hat{p})(\alpha+j\beta)} \hat{k}_n \quad (10.270)$$

Y los campos dependientes del tiempo serán

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{-\alpha(\vec{r} \cdot \hat{p})} \sum_{n=1}^N |C_n| \cos(\omega t - \beta(\vec{r} \cdot \hat{p}) + \delta_n) \hat{e}_n \quad (10.271)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = e^{-\alpha(\vec{r} \cdot \hat{p})} \sum_{n=1}^N \left| \frac{C_n}{\eta_c} \right| \cos(\omega t - \beta(\vec{r} \cdot \hat{p}) + \delta_n - \theta_n) \hat{k}_n \quad (10.272)$$

10.11.1. Expresión general para $\langle \vec{S} \rangle$

Vamos a expresar el vector de Poynting en función de los fasores campo

$$\vec{S} = Re \left[\vec{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \times Re \left[\vec{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right] \quad (10.273)$$

Donde, ahora que sabemos expresar ondas planas en sistemas de referencia arbitrarios, los fasores dependen de \vec{r} en lugar de z . Si ahora descomponemos los fasores en sus partes reales e imaginarias

$$\vec{E} = \vec{E}_R + j\vec{E}_I \quad (10.274)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_R + j\vec{H}_I \quad (10.275)$$

Estos fasores siguen dependiendo de \vec{r} , pero dejaremos de indicarlo por simplicidad. El vector de Poynting será

$$\vec{S} = Re \left[\left(\vec{E}_R + j\vec{E}_I \right) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \right] \times Re \left[\left(\vec{H}_R + j\vec{H}_I \right) (\cos \omega t + j \sin \omega t) \right] \quad (10.276)$$

Haciendo el cálculo nos queda que

$$\vec{S} = \left(\vec{E}_R \times \vec{H}_R \right) \cos^2 \omega t + \left(\vec{E}_I \times \vec{H}_I \right) \sin^2 \omega t + \left[\left(\vec{E}_R \times \vec{H}_I \right) + \left(\vec{E}_I \times \vec{H}_R \right) \right] \frac{\sin 2\omega t}{2} \quad (10.277)$$

Ahora, si tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \quad (10.278)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 \quad (10.279)$$

Podemos escribir el valor promedio del vector de Poynting de la siguiente manera

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{E}_R \times \vec{H}_R \right) + \left(\vec{E}_I \times \vec{H}_I \right) \right] \quad (10.280)$$

Se puede comprobar que esto es equivalente a escribir

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \quad (10.281)$$

Donde \vec{H}^* es el complejo conjugado del fador que representa el campo magnético. Esta es una expresión completamente general, válido para cualquier combinación de campos \vec{E} y \vec{H} . En el caso de ondas planas que se propagan en la dirección marcada por \hat{p} , esta expresión se transforma en

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} Re \left[\left(\sum_{n=1}^N C_n e^{-(\vec{r} \cdot \hat{p})(\alpha + j\beta)} \hat{e}_n \right) \times \left(\sum_{m=1}^N \frac{C_m}{\eta_c} e^{-(\vec{r} \cdot \hat{p})(\alpha + j\beta)} \hat{k}_m \right)^* \right] \quad (10.282)$$

Que se puede escribir como

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} e^{-(\vec{r} \cdot \hat{p})\alpha} \text{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{C_n C_m^*}{\eta_c^*} (\hat{e}_n \times \hat{k}_m) \right] \quad (10.283)$$

Y redistribuyendo términos, llegamos a la siguiente expresión

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2|\eta_c|} e^{-\alpha(\vec{r} \cdot \hat{p})} \text{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_n C_m^* e^{j\theta_n} (\hat{e}_n \times \hat{k}_m) \right] \quad (10.284)$$

Que, como es lógico, sigue siendo un vector que apunta en la dirección del eje z .

10.12. Ondas en direcciones opuestas

Volviendo atrás, recordemos que al resolver la ecuación de ondas homogénea para el fasor campo eléctrico en un medio en el que admitamos una conductividad nula (de manera que la permitividad es número real), obteníamos la expresión de la ecuación 10.165

$$\vec{E}(z) = (E_+ e^{-jkz} + E_- e^{jkz}) \hat{e} \quad (10.285)$$

Donde ahora hemos utilizado un eje arbitrario caracterizado por \hat{k} en lugar del eje x . Durante el desarrollo anterior, identificamos el primer sumando con una onda que se propaga en la dirección positiva del eje x , mientras que el segundo se correspondía con una onda que se propaga en la dirección negativa de dicho eje. Antes fijamos a cero el coeficiente E_- , argumentando que nos interesaba tan solo la onda que se propagaba en la dirección positiva. Sin embargo, podríamos haber hecho lo contrario y tratar la onda que se propaga en la dirección negativa.

El hecho de que la solución a la ecuación de ondas sea la suma de una onda que se propaga en la dirección positiva y de otra que se propaga en el sentido contrario hace que podamos hacer todos los tratamientos anteriores considerando la contribución de la onda que se propaga en la dirección negativa. Los cálculos y derivaciones son exactamente los mismos que en el caso de la propagación en una única dirección, y el resultado es que podemos construir señales polarizadas a partir de la combinación lineal de ondas que se propagan tanto en dirección $+z$ como $-z$. Los fasores que representan los campos \vec{E} y \vec{H} serán entonces

$$\vec{E}(z) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-z(\alpha+j\beta)} \hat{e}_n + \sum_{m=1}^N C_m^{z(\alpha+j\beta)} \hat{e}_m \quad (10.286)$$

$$\vec{H}(z) = \sum_{n=1}^N \frac{C_n}{\eta_c} e^{-z(\alpha+j\beta)} \hat{k}_n - \sum_{m=1}^N \frac{C_m}{\eta_c} e^{z(\alpha+j\beta)} \hat{k}_m \quad (10.287)$$

Donde los primeros sumandos representan ondas que se propagan en dirección $+z$ y los segundos, ondas que avanzan en dirección $-z$. Como apunte, podría parecer que, al no haber un signo menos en la exponencial de atenuación para las ondas que se propagan en $-z$ (que van multiplicadas por $e^{\alpha z}$), la amplitud de estas debería diverger. No obstante, si recordamos que para estas ondas, z decrece a medida que avanzamos en el tiempo, el problema se soluciona.

Lo último que tenemos que tener en cuenta es el signo menos que acompaña a los fasores de campo magnético que representan ondas propagándose en dirección $-z$. Esto es un hecho que, matemáticamente, surge de la ecuación de Maxwell⁹ $\nabla \times \vec{E} = -j\mu\omega\vec{H}$. Podemos

⁹Tan solo hay que repetir el cálculo para ondas en dirección $+z$, pero ahora el signo de la exponencial está cambiado.

motivar esto recordando la condición que tenían que cumplir los versores \vec{e}'_n y \hat{k}'_n

$$\hat{e}_n \times \hat{k}'_n = \hat{p} \quad (10.288)$$

Donde \hat{p} es un vector unitario que apunta en la dirección en que se propagaba la onda (en el caso de propagación a lo largo del eje z , $\hat{p} = \hat{z}$). Ahora, la dirección de propagación está marcada por el versor $-\hat{z}$. Si ahora los \hat{k}'_n son los versores que caracterizan los ejes perpendiculares en los que vibran los campos magnéticos asociados a un campo eléctrico que se propaga en dirección $-z$, la condición que se tiene que cumplir es

$$\hat{e}_n \times \hat{k}'_n = -\hat{z} \quad (10.289)$$

De donde se deduce fácilmente que

$$\hat{k}'_n = -\hat{k}_n \quad (10.290)$$

Explicando así el signo menos.

10.12.1. Ejemplo: Onda estacionaria en el vacío

Vamos a considerar un ejemplo sencillo. Consideremos la siguiente superposición de ondas planas linealmente polarizadas que se propagan en el vacío

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{-jkz} \hat{x} + E_0 e^{jkz} \hat{x} \quad (10.291)$$

El fasor campo magnético correspondiente se puede calcular utilizando la forma fasorial de las ecuaciones de Maxwell.

$$\vec{H}(z) = \frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \hat{y} - \frac{E_0}{\eta} e^{jkz} \hat{y} \quad (10.292)$$

Los campos dependientes del tiempo serán

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left[\vec{E}(z) e^{j\omega t} \right] \quad (10.293)$$

$$\vec{H}(z, t) = \text{Re} \left[\vec{H}(z) e^{j\omega t} \right] \quad (10.294)$$

Haciendo los cálculos, tendremos que

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{x} + E_0 \cos(\omega t + kz) \hat{x} \quad (10.295)$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - kz) \hat{y} - \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t + kz) \hat{y} \quad (10.296)$$

Desarrollando los cosenos de sumas, podemos expresar estos campos de una manera más compacta.

$$\vec{E}(z, t) = 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{x} \quad (10.297)$$

$$\vec{H}(z, t) = 2 \frac{E_0}{\eta} \sin(kz) \sin(\omega t) \hat{y} \quad (10.298)$$

Llegamos a expresiones conocidas, las ondas estacionarias¹⁰. Una de las características interesantes de estas ondas es que no acarrear un transporte neto de energía. Podemos comprobar que nuestra onda electromagnética estacionaria también cumple esto si calculamos el valor promedio del vector de Poynting

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E}(z) \times \vec{H}^*(z) \right] \quad (10.299)$$

Haciendo el cálculo con los fasores que ya hemos visto en esta sección, resulta que

$$\langle \vec{S} \rangle = 0 \quad (10.300)$$

Podemos comprobar entonces que el valor promedio del flujo de energía asociado a esta onda electromagnética es nulo.

¹⁰Estos fenómenos se estudian en profundidad en Mecánica Clásica I

Capítulo 11

Circuitos de corriente alterna

A lo largo de este tema generalizaremos lo que se introdujo en el capítulo 6, extendiendo la teoría para poder tratar adecuadamente voltajes que varían con el tiempo.

11.1. Limitaciones de la teoría de circuitos. Campos de variación lenta

En temas anteriores hemos introducido ya el concepto de circuito eléctrico, y dedujimos las dos leyes que nos permiten describir su comportamiento frente a fuentes de potencial constantes, las leyes de Kirchhoff. Ahora nos gustaría considerar fuentes de potencial que varíen con el tiempo, pero esto nos lleva a un cierto problema.

Como ya hemos visto en el tema anterior, la solución a las ecuaciones de onda para el potencial escalar y el potencial vector nos lleva a unas funciones que llamábamos potenciales retardados. Cuánto más nos alejábamos del punto fuente, más tardaban en notarse los cambios en dichas fuentes, debido a que los campos electromagnéticos, y las perturbaciones en los mismos se propagan a una velocidad finita, la de la luz. Esto es un gran inconveniente, ya que los circuitos cuentan con geometrías complejas, y si tenemos que tener en cuenta un retardo distinto para cada uno de los puntos del mismo, el problema se complica demasiado.

Por suerte, en el tema anterior también vimos una solución a este problema cuando hablamos de los potenciales cuasiestacionarios. Demostramos que, si se cumplen ciertas condiciones, podíamos considerar que no existe el retardo entre que se produce un cambio en la fuente hasta que los potenciales se modifiquen. La condición que se tenía que cumplir para que esta aproximación sea válida es la siguiente. Si D es la distancia entre la fuente y el punto donde estamos midiendo

$$D \ll \lambda \tag{11.1}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\frac{\lambda}{T} = c \implies \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \tag{11.2}$$

Podemos escribir la condición de campos de variación lenta (cuasiestacionarios) de la siguiente manera

$$D \ll \frac{2\pi c}{\omega} \tag{11.3}$$

Es decir, que las dimensiones del circuito deberán ser mucho menores que $\frac{2\pi c}{\omega}$. Como se puede ver, para un circuito determinado, que estas aproximaciones sean o no válidas dependerá por completo de las características de la onda electromagnética que se propaga por la misma.

Siempre que encontremos un problema en el que queramos aplicar la teoría de circuitos que desarrollaremos en este tema, es muy importante confirmar que estamos dentro del rango de aplicación de la propia teoría. De ahora en adelante, asumiremos que la aproximación cuasiestacionaria se cumple, sin más comentarios.

11.2. Voltajes y diferencias de potencial

A lo largo de este tema, hablaremos con mucha frecuencia de la diferencia de potencial entre dos puntos. Sin embargo, ya sabemos que en el caso en el que exista un campo magnético el campo eléctrico ya no es conservativo, puesto que según las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.4)$$

De donde se deduce lo siguiente

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11.5)$$

Integremos ambos términos a través de un camino arbitrario γ que une los puntos a y b. Aplicando el teorema del gradiente, obtenemos la siguiente expresión

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_a - V_b - \int_{\gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{r} \quad (11.6)$$

Y como γ no depende del tiempo

$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_a - V_b - \frac{d}{dt} \int_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.7)$$

Tenemos entonces que la circulación del campo eléctrico a través de un determinado camino (a la que llamaremos voltaje entre esos dos puntos) se puede descomponer en dos términos. El término $V_a - V_b$, al que nos referiremos como diferencia de potencial entre a y b, y un término que depende explícitamente del camino de integración. Consideremos ahora una trayectoria cerrada Γ dada por la unión de los caminos γ_1 y γ_2

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad (11.8)$$

Si integramos en esta trayectoria cerrada tendremos que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (11.9)$$

Que podemos escribir como

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -(V_a - V_b) - (V_b - V_a) - \frac{d}{dt} \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} - \frac{d}{dt} \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.10)$$

O, lo que es lo mismo

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \quad (11.11)$$

Utilizando el teorema del rotacional, siendo S una superficie cualquiera limitada por Γ

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (11.12)$$

Donde Φ es el flujo magnético. Este resultado significa que podemos establecer al siguiente relación

$$\int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Phi \quad (11.13)$$

O, lo que es lo mismo

$$\int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Phi - \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.14)$$

Para convertir esta expresión en algo útil, es conveniente escribir explícitamente en que dirección estamos recorriendo cada camino

$$\int_{\gamma_1}^b \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Phi - \int_{\gamma_2}^a \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.15)$$

O, lo que es lo mismo

$$\int_{\gamma_1}^b \vec{A} \cdot d\vec{r} = \Phi + \int_{\gamma_2}^a \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.16)$$

Ahora, sustituyendo $\gamma = \gamma_1$ en la ecuación 11.7, tendremos que

$$\int_{\gamma_1}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_a - V_b - \frac{d}{dt} \int_{\gamma_1}^b \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.17)$$

Que como acabamos de demostrar, se puede expresar en función del flujo

$$\int_{\gamma_1}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = (V_a - V_b) - \frac{d\Phi}{dt} - \frac{d}{dt} \int_{\gamma_2}^a \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.18)$$

Si ahora tenemos en cuenta que, utilizando de nuevo la ecuación 11.7 se llega a

$$\int_{\gamma_2}^a \vec{E} \cdot d\vec{r} = V_a - V_b - \frac{d}{dt} \int_{\gamma_2}^a \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (11.19)$$

Podemos combinar las dos últimas ecuaciones en una forma más simple

$$\int_{\gamma_1}^b \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2}^a \vec{E} \cdot d\vec{r} - \frac{d\Phi}{dt} \quad (11.20)$$

Hemos llegado a un hecho bastante preocupante, y es que el voltaje entre dos puntos no es único, ya que depende de como lo midamos. Pensemos en la siguiente figura

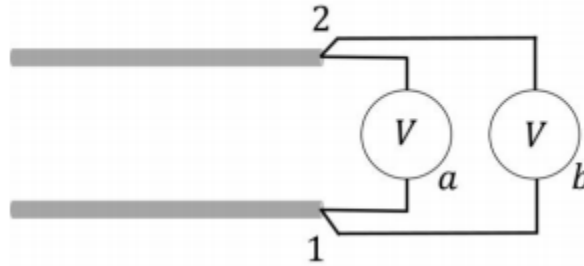


Figura 11.1: Dos maneras distintas de medir el voltaje entre los puntos 1 y 2.

Según lo que acabamos de deducir, las medidas utilizando la configuración a son distintas a las realizadas en la configuración b. Esto es un gran problema para el desarrollo teórico, donde queremos hablar de voltajes sin tener que especificar la manera de medir. Es aquí donde entra en juego la segunda aproximación sobre la que se sustenta la teoría de circuitos, y esta es que consideramos que los campos electromagnéticos se encuentran confinados en el interior de los elementos del circuito, de manera que el campo magnético (y por lo tanto el flujo magnético) fuera de los conductores es nulo. Bajo estas condiciones, voltaje y diferencia de potencial coinciden, y además el voltaje no depende de la configuración de medida (es decir, el camino escogido para la circulación del campo eléctrico).

11.3. Señales periódicas

Introduciremos ahora algo de notación. En primer lugar, a lo largo de todo el tema consideraremos variaciones temporales de tipo sinusoidal, tanto para las intensidades como para las diferencias de potencial. De esta manera, podremos utilizar fasores para representar dichas cantidades. A lo largo de todo el tema, utilizaremos letras minúsculas para referirnos a la señal dependiente del tiempo, y letras mayúsculas para referirnos al fasor que representa dicha señal. Por lo tanto, escribiremos

$$i(t) = \text{Re} [Ie^{j\omega t}] \quad (11.21)$$

$$v(t) = \text{Re} [Ve^{j\omega t}] \quad (11.22)$$

11.4. Resistencias, inductores y condensadores

Los tres elementos pasivos que estudiaremos en este tema son la resistencia, el inductor y el condensador. Veamos como afecta una señal alterna a las caídas de potencial en cada una de estos elementos.

11.4.1. Resistencias

Este es el caso más simple. Consideremos una resistencia de valor R a la que llega una intensidad de la forma

$$i(t) = \text{Re} [Ie^{j\omega t}] \quad (11.23)$$

Utilizando la ley de Ohm, podemos determinar la caída de potencial en esos elementos

$$v = iR = R \cdot \text{Re} [Ie^{j\omega t}] = \text{Re} [IRe^{j\omega t}] \quad (11.24)$$

Ahora, comparando con la ecuación 11.22, podemos determinar el fasor que representa la caída de potencial en una resistencia

$$V = IR \quad (11.25)$$

Como R es un número real, sabemos que en una resistencia, el voltaje y la intensidad estarán en fase.

11.4.2. Inductores

Los inductores son secciones de circuito (generalmente bobinas) con un coeficiente de autoinducción L . Para hallar la diferencia de potencial generada en estos elementos utilizamos la ley de Faraday

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \quad (11.26)$$

Esta es la expresión para la fuerza electromotriz inducida, que como ya sabemos se opone al paso de la corriente. Podemos decir entonces que

$$|v| = L\frac{di}{dt} \quad (11.27)$$

Pensemos ahora en el signo que tiene que tener esta diferencia de potencial. Si tenemos una bobina que es recorrida por una intensidad i , que entra en la bobina por un extremo que llamaremos a y sale por otro que llamaremos b , como el campo eléctrico apunta a los mínimos de potencial, sabemos que el potencial en b es menor que el potencial en a , y por lo tanto

$$v = v_a - v_b > 0 \quad (11.28)$$

Y de esta manera

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (11.29)$$

Ahora buscamos una relación entre los fasores. Para ello, tomamos

$$\operatorname{Re} [V e^{j\omega t}] = L \frac{d}{dt} \operatorname{Re} [I e^{j\omega t}] \quad (11.30)$$

De donde se deduce que

$$\operatorname{Re} [V e^{j\omega t}] = \operatorname{Re} [j\omega L I e^{j\omega t}] \quad (11.31)$$

Y por lo tanto, tendremos la siguiente relación entre fasores

$$V = j\omega L I \quad (11.32)$$

Comprobamos que ahora el voltaje está desfasado 90° con respecto a la intensidad.

11.4.3. Condensadores

Consideremos un condensador caracterizado por una capacidad C , que por definición será

$$C = \frac{q}{v} \quad (11.33)$$

Podemos manipular esta expresión para llegar a

$$v = \frac{1}{C} \int i dt \quad (11.34)$$

Expresando esto en función de los fasores

$$\operatorname{Re} [V e^{j\omega t}] = \frac{1}{C} \int \operatorname{Re} [I e^{j\omega t}] dt = \operatorname{Re} \left[\frac{I}{j\omega C} e^{j\omega t} \right] \quad (11.35)$$

De donde obtenemos la siguiente relación entre fasores

$$V = \frac{1}{j\omega C} I \quad (11.36)$$

Vemos que en este caso también existe un desfase relativo de 90° entre el voltaje y la intensidad.

11.5. Impedancia

Definimos la impedancia de un elemento de un circuito como el cociente entre los fasores voltaje e intensidad

$$Z \equiv \frac{V}{I} \in \mathbb{C} \quad (11.37)$$

Cabe destacar que, a pesar de ser un número complejo que provenga del cociente entre dos fasores, la impedancia no es en si misma un fador, ya que no representa una magnitud que varía en el tiempo. Es simplemente una constante de proporcionalidad.

Utilizando las relaciones entre los fasores voltaje e intensidad para resistencias, inductores y condensadores que hemos deducido en el apartado anterior, podemos calcular las impedancias asociadas a estos elementos

$$Z_V = R \quad (11.38)$$

$$Z_L = j\omega L \quad (11.39)$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} \quad (11.40)$$

Podemos pensar en la impedancia como un equivalente a la resistencia en el caso de la corriente continua (de hecho, para los elementos en los que la dependencia temporal no es relevante la impedancia es igual a la resistencia). De esta manera, para calcular impedancias equivalentes a asociaciones en serie o paralelo de diferentes elementos utilizaremos las mismas expresiones que si se tratasen de resistencias ordinarias, con la salvedad de que ahora la impedancia es un número complejo.

Consideremos entonces el ejemplo clásico, un circuito RLC en serie

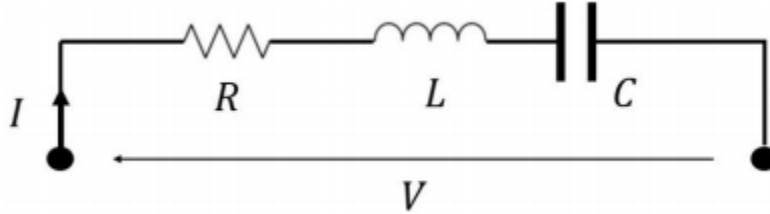


Figura 11.2: Circuito RLC en serie

La impedancia total de este circuito vendrá dada por la suma de las impedancias de sus distintos elementos.

$$Z = Z_V + Z_L + Z_C = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j\chi \quad (11.41)$$

Donde a χ , la parte imaginaria de la impedancia, se la conoce como reactancia. A menudo separamos esta reactancia en dos términos

$$\chi_L = j\omega L \quad (11.42)$$

$$\chi_C = -\frac{j}{\omega C} \quad (11.43)$$

Donde χ_L recibe el nombre de reactancia inductiva, y χ_C el de reactancia capacitiva.

11.6. Análisis de circuitos

A la hora de resolver un circuito, nos interesa hallar la intensidad que recorre cada una de sus ramas como función del tiempo. Para hacer esto en el caso de la corriente continua contábamos con las leyes de Kirchhoff

$$\sum_k i_k = 0 \quad (11.44)$$

$$\sum_k v_k = \sum_k R_k i_k \quad (11.45)$$

Se puede demostrar que en el caso de la corriente alterna, las leyes de Kirchhoff toman exactamente la misma forma, pero reemplazando la resistencia por la impedancia y trabajando con fasores en lugar de señales instantáneas

$$\sum_k I_k = 0 \quad (11.46)$$

$$\sum_k V_k = \sum_k Z_k I_k \quad (11.47)$$

Al trabajar con fasores, nos ahorramos trabajar con ecuaciones diferenciales complicadas (resolver las ecuaciones de Maxwell), y nos limitamos a resolver sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes complejos, algo mucho más simple.

11.6.1. Valores eficaces

Definimos el valor eficaz asociado a una determinada señal alterna como el valor de la intensidad o voltaje continuo que, a lo largo de un periodo T y sobre una resistencia R , disipará la misma cantidad de calor. Para una señal continua, sabemos que

$$Q = I_{ef}^2 RT \quad (11.48)$$

Para una señal alterna, donde $i = i(t)$, el calor disipado vendrá dado por la siguiente integral

$$Q = R \int_0^T i^2(t) dt \quad (11.49)$$

De donde podemos despejar la intensidad eficaz

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (11.50)$$

Para calcular el voltaje eficaz, partimos de la expresión para el calor disipado en función del voltaje eficaz

$$Q = \frac{V_{ef}^2}{R} T \quad (11.51)$$

Para la señal alterna, el calor vendrá dado por

$$Q = \frac{1}{R} \int_0^T v^2(t) dt \quad (11.52)$$

De donde se deduce una expresión idéntica a la de la intensidad eficaz

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (11.53)$$

Si ahora pensamos en la forma de las señales alternas que estamos considerando, es decir, aquellas que se pueden representar mediante fasores, estas serán

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \delta) \quad (11.54)$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (11.55)$$

Sustituyendo estas formas en las expresiones para el voltaje e intensidad eficaces, llegamos al siguiente resultado

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (11.56)$$

$$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad (11.57)$$

11.7. Potencia en un circuito alterno

Recordemos que, para un circuito de corriente continua, la potencia disipada viene dada por la ley de Joule

$$P = VI \quad (11.58)$$

En los circuitos de corriente alterna ocurre lo mismo, pero ahora, como tanto la intensidad como el voltaje dependen del tiempo, la potencia disipada también lo hará

$$P(t) = iv \quad (11.59)$$

Recordemos que, en nuestro caso, las señales alternas vendrán en referencia a un coseno, con la misma frecuencia y con un desfase entre la intensidad y el voltaje

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (11.60)$$

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (11.61)$$

Vamos a expresarlo en función de los valores eficaces, ya que más adelante simplificará los resultados

$$i(t) = \sqrt{2}I_{ef} \cos(\omega t) \quad (11.62)$$

$$v(t) = \sqrt{2}V_{ef} \cos(\omega t - \varphi) \quad (11.63)$$

De modo que la potencia instantánea será

$$P(t) = 2V_{ef}I_{ef} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) \quad (11.64)$$

Empleando identidades trigonométricas, la potencia instantánea se puede escribir de una forma más útil

$$P(t) = V_{ef}I_{ef} \cos(\varphi) + V_{ef}I_{ef} \cos(2\omega t + \varphi) \quad (11.65)$$

A partir de esta potencia instantánea se pueden definir varias cantidades.

11.8. Potencia activa y factor de potencia

Definimos la potencia activa como el promedio de la potencia disipada en un periodo

$$P_{act} \equiv \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (11.66)$$

Haciendo la integral, tendremos que

$$P_{act} = V_{ef}I_{ef} \cos \varphi \quad (11.67)$$

Al término $\cos \varphi$ se lo conoce como factor de potencia, el cociente entre la potencia activa y el producto de los valores eficaces de la intensidad y el voltaje

$$\cos \varphi = \frac{P_{act}}{I_{ef}V_{ef}} \quad (11.68)$$

También podemos utilizar la definición de impedancia para deducir otra expresión para la potencia activa

$$Z = \frac{V}{I} \quad (11.69)$$

Que, escribiendo nuestros fasores

$$Z = \frac{V_0}{I_0 e^{-j\varphi}} = \frac{\sqrt{2}V_0}{\sqrt{2}I_0} e^{j\varphi} \quad (11.70)$$

Ahora, utilizando la fórmula de Euler para la exponencial compleja y utilizando los resultados para los valores eficaces

$$Z = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (11.71)$$

Ahora, utilizando la definición de resistencia

$$R = \operatorname{Re}[Z] = \frac{V_{ef}}{I_{ef}} \cos \varphi \quad (11.72)$$

Este resultado nos permite escribir la potencia activa de la siguiente manera

$$P_{act} = RI_{ef}^2 \quad (11.73)$$

11.8.1. Potencia reactiva y potencia aparente

Definimos las potencias aparentes y reactivas como

$$P_{ap} \equiv I_{ef} V_{ef} \quad (11.74)$$

$$P_{react} \equiv I_{ef} V_{ef} \sin \varphi \quad (11.75)$$

Para ver la utilidad de estas expresiones, consideremos el siguiente producto de fasores

$$VI^* = 2I_{ef}V_{ef}e^{j\varphi} = 2V_{ef}I_{ef}(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (11.76)$$

Se puede ver que

$$Re [VI^*] = 2P_{act} \quad (11.77)$$

$$Im [VI^*] = 2P_{react} \quad (11.78)$$

Y además

$$|VI^*| = 2P_{ap} \quad (11.79)$$

Vemos que al trabajar con los fasores originales arrastramos todo el rato un factor 2. Para ello, en ocasiones se trabaja con fasores eficaces

$$\tilde{I} \equiv I_{ef}e^{-j\varphi} \quad (11.80)$$

$$\tilde{V} = V_{ef} \quad (11.81)$$

Utilizando estos fasores, ya no arrastramos el factor de 2

$$Re [\tilde{V}\tilde{I}^*] = P_{act} \quad (11.82)$$

$$Im [\tilde{V}\tilde{I}^*] = P_{react} \quad (11.83)$$

$$|\tilde{V}\tilde{I}^*| = P_{ap} \quad (11.84)$$

11.8.2. Teorema de Tellegen

El teorema de Tellegen es la expresión del principio de conservación de la energía para circuitos alternos. Nos dice que, a lo largo de un determinado circuito con N elementos (entendiendo por esto fuentes de tensión, intensidad y elementos pasivos), se verificará la siguiente igualdad

$$\sum_{k=1}^N i_k(t) v_k(t) = 0 \quad \forall t \quad (11.85)$$

No demostraremos formalmente este teorema, pero no debería resultar difícil de aceptar, ya que es posible reescribirlo de la siguiente manera

$$\sum_{Fuentes} P(t) = \sum_{Elementos pasivos} P(t) \quad (11.86)$$

Es decir, toda la potencia aportada por las fuentes es consumida por los elementos pasivos.

11.9. Resonancia en un circuito RLC en serie

Consideremos de nuevo el ejemplo del circuito RLC en serie

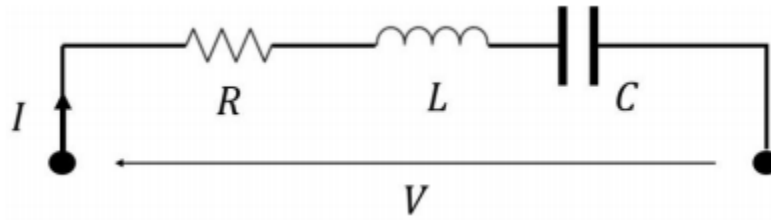


Figura 11.3: Circuito RLC en serie

Ya hemos calculado en un apartado anterior la impedancia compleja asociada a ese circuito

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (11.87)$$

El módulo de esta impedancia es sencillo de calcular

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (11.88)$$

Dado que el parámetro R es fijo, tendremos que la impedancia compleja alcanzará su valor mínimo cuando se de la siguiente condición

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \implies \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \equiv \omega_0 \quad (11.89)$$

Cuando se da esta situación decimos que el circuito se encuentra en resonancia. Como se puede ver en la ecuación anterior, esto ocurre cuando la frecuencia de las señales alternas toma un valor determinado, conocido como frecuencia de corte

$$f_0 \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (11.90)$$

En esta situación, la impedancia del circuito toma su valor mínimo (y además será un número real, ya que toma el mismo valor que la resistencia). Si ahora tenemos en cuenta la relación entre los fasores asociados al voltaje y a la intensidad

$$I = \frac{V}{Z} \quad (11.91)$$

Es sencillo deducir que, para un circuito en resonancia, la intensidad asociada a un determinado voltaje es máxima. En ocasiones, resulta más cómodo trabajar con la admitancia

$$Y \equiv \frac{1}{Z} \quad (11.92)$$

Que, al igual que la impedancia, en general se trata de un número complejo. Así como la impedancia es mínima para un circuito RLC serie en resonancia, la admitancia de dicho circuito toma un valor máximo.

En las siguientes gráficas se puede observar el comportamiento de los distintos parámetros característicos de un circuito resonante.

11.10. Factor de calidad

Para un determinado circuito, su factor de calidad Q se define como

$$Q \equiv 2\pi \frac{E_a}{E_d} \quad (11.93)$$

Donde E_a es la energía máxima que se puede almacenar en el circuito y E_d es la máxima energía disipada en un periodo.

Ahora veremos como se calcula cada uno de los términos que aparece en esta expresión. La energía disipada en un periodo es sencilla de obtener. No hay más que multiplicar la potencia activa por el periodo de la señal alterna (recordemos que la potencia activa se obtiene integrando a lo largo de un periodo la potencia instantánea disipada). Tendremos entonces que

$$E_d = P_{act}T = (RI_{ef}^2)T = \frac{RI^2T}{2} \quad (11.94)$$

La energía máxima almacenada es un término que depende de la forma del circuito, así que para entender como se calcula veremos algunos ejemplos

11.10.1. Circuito RL en serie

Consideremos el siguiente circuito

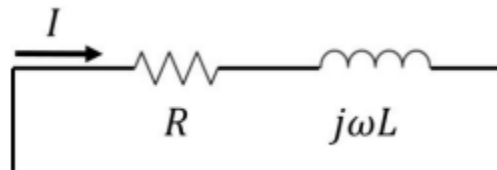


Figura 11.4: Circuito RL en serie

En este circuito, la energía tan solo se puede almacenar en la bobina inductora. El valor de la energía almacenada será

$$E_a = \frac{1}{2}I_{max}^2L \quad (11.95)$$

Por lo que el factor de calidad vendrá dado por

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2}I_{max}^2L}{\frac{1}{2}RI_{max}^2T} = \frac{2\pi L}{RT} = \frac{\omega L}{R} \quad (11.96)$$

11.10.2. Circuito RC en serie

Ahora pensemos en el siguiente circuito

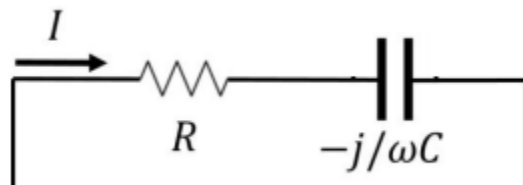


Figura 11.5: Circuito RC

Este caso es muy similar al anterior. Ahora el único elemento que almacena energía es el condensador, por lo que el valor de la energía máxima almacenada será

$$E_a = \frac{1}{2}CV_{max}^2 \quad (11.97)$$

Ahora, teniendo en cuenta que el módulo de la impedancia del condensador es

$$|Z| = \left| \frac{-j}{\omega C} \right| = \frac{1}{\omega C} \quad (11.98)$$

Podemos expresar la energía máxima almacenada como

$$E_a = \frac{1}{2} \frac{I_{max}^2}{\omega^2 C} \quad (11.99)$$

Y por lo tanto, el factor de calidad será

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} \frac{I_{max}^2}{\omega^2 C}}{\frac{1}{2} RI_{max}^2 T} = \frac{1}{\omega CR} \quad (11.100)$$

11.10.3. Circuito RLC en serie

Consideremos por último el caso del circuito RLC

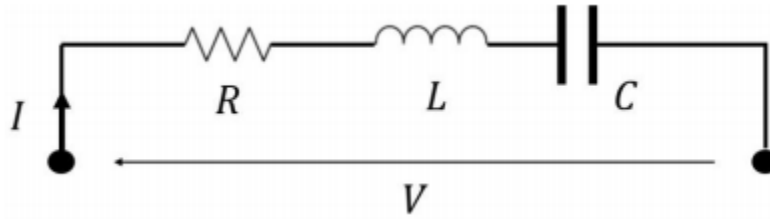


Figura 11.6: Circuito RLC en serie

En este caso, para calcular la energía máxima almacenada hay que tener en cuenta que esta se dará en el estado de resonancia (ya que la intensidad será máxima para un determinado voltaje). En todo momento, la energía total almacenada será la misma, así que para calcularla de manera sencilla utilizaremos los casos extremos. Cuando el voltaje en el condensador es máximo (y por lo tanto la intensidad en la bobina es nula) y cuando la intensidad en la bobina es máxima (y el voltaje en el condensador igual a cero). La energía almacenada será

$$E_a = \frac{1}{2}CV_{max}^2 = \frac{1}{2}LI_{max}^2 \quad (11.101)$$

Y el factor de calidad vendrá dado por

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (11.102)$$

Además de este valor teórico, existe una forma experimental de obtener el factor de calidad de un circuito RLC en serie¹ si tomamos medidas de la intensidad que circula por el circuito en función de la frecuencia de la señal, obtendremos la siguiente gráfica

¹Esto es útil para las prácticas de laboratorio

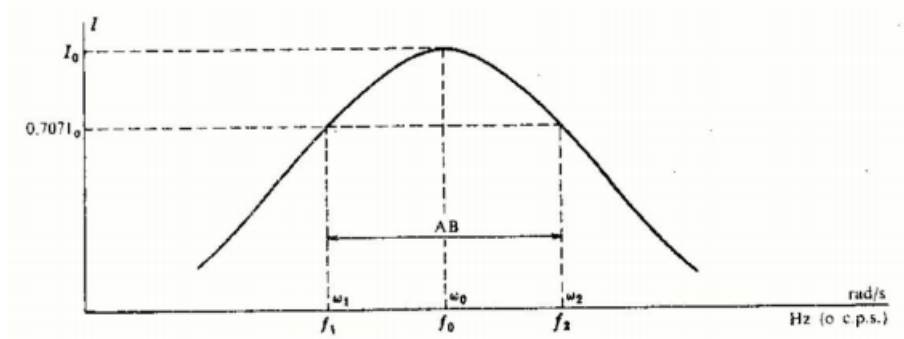


Figura 11.7: Intensidad de corriente frente a la frecuencia. Se muestra el valor máximo de la intensidad, I_0 , que se da cuando el circuito entra en resonancia, así como las frecuencias f_1 y f_2 , aquellas para las que $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0,7071I_0$

La potencia consumida en un periodo (energía disipada) por el circuito cuando $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ será

$$E_d = R \frac{I_0^2}{2} T = \frac{E_d0}{2} \tag{11.103}$$

Exactamente la mitad que en el caso de la intensidad máxima, por lo que los puntos asociados a las frecuencias f_1 y f_2 se llaman puntos de potencia mitad. El factor de calidad se puede calcular como

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \equiv \frac{f_0}{BW} \tag{11.104}$$

Donde BW es el ancho de banda del circuito.

11.11. Teoremas de Thévenin y Norton

En el campo de la teoría de circuitos existen dos teoremas de gran importancia que simplifican mucho el análisis de circuitos: los teoremas de Thévenin y de Norton. En estos apuntes no demostraremos los teoremas, sino que nos limitaremos a enunciarlos.

En primer lugar, el teorema de Thévenin establece que cualquier red lineal se puede sustituir por un generador de tensión v_{Th} y una impedancia Z_{Th} dispuestos en serie, conocidas como voltaje e impedancia Thévenin, de manera que sus efectos sobre cualquier elemento externo a la red lineal son los mismos que los de la red inicial. El valor de V_{Th} es igual al voltaje V_0 que produce la red lineal en los terminales de salida cuando se desconecta la carga y se deja el circuito abierto

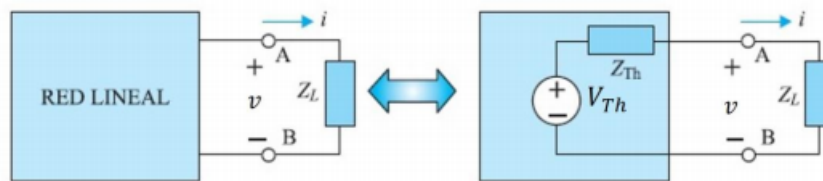


Figura 11.8: Sustitución de una red lineal por su equivalente Thévenin. Para hallar V_{Th} no hay más que provocar un cortocircuito entre los terminales A y B (desconectando la impedancia Z_L), y calcular el voltaje entre estos dos terminales

Por lo tanto, tendremos que el fasor que representa la intensidad que recorre la red lineal en el estado de cortocircuito (cuando $Z_L = 0$) será

$$I_{corto} = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}} \quad (11.105)$$

El teorema de Norton es la versión dual del de Thévenin, y establece que cualquier red lineal se puede sustituir por una fuente de intensidad i_N y una impedancia Z_N dispuestos en paralelo. El fasor asociado a la intensidad se puede calcular como

$$I_N = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}} \quad (11.106)$$

Y la impedancia será

$$Z_N = Z_{Th} \quad (11.107)$$

Gráficamente, el teorema de Norton se puede representar a través de la siguiente figura

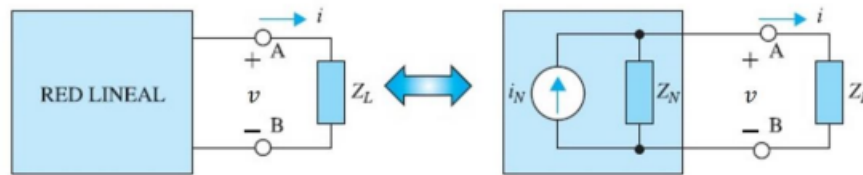


Figura 11.9: Sustitución de una red lineal por su equivalente Norton

11.12. Transformadas de Laplace

En esta sección introduciremos una herramienta matemática muy útil, la transformada de Laplace². Esta será una introducción poco formal a estas transformadas, ya que nos limitaremos a definirla y a describir sus propiedades, sin pararnos en las demostraciones.

En esencia, la transformada de Laplace es una manera de obtener una función a partir de otra, de manera que las variables de estas dos funciones son diferentes. Para ver como se hace este proceso, partiremos de una función compleja de variable real, a la que denominaremos $f(t)$.

Ahora vamos a imponer ciertas condiciones sobre $f(t)$, necesarias para que exista la transformada. En primer lugar, la función debe estar definida para $t \geq 0$. La segunda condición, y la más importante de ellas, es que la función ha de ser de orden exponencial. Esto quiere decir que tiene que existir números reales α y β tales que

$$|f(t)| \leq \alpha e^{\beta t} \quad (11.108)$$

Para valores de t lo suficientemente altos. Intuitivamente, podemos decir que una función es de orden exponencial cuando nunca crece más rápido que una función exponencial. Para las funciones que nos interesan a nosotros, daremos por hecho que se cumplen estas condiciones, sin pararnos a verificarlas en cada caso. De esta forma, definimos la transformada de Laplace $L[f(t)] \equiv \tilde{f}(s)$ a partir de la siguiente integral

$$\tilde{f}(s) \equiv \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (11.109)$$

Donde s es una variable compleja, a la que a veces se la conoce como frecuencia compleja.

²La transformada de Laplace y otras transformadas integrales se estudian en detalle en MMVI.

11.12.1. Transformada inversa

Existe una manera general de calcular la transformada inversa de una función (es decir, obtener $f(t)$ a partir de $\tilde{f}(s)$). La transformada inversa viene dada por una integral de contorno en el plano complejo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{T \rightarrow \infty} \oint_{\gamma-jT}^{\gamma+jT} e^{st} \tilde{f}(s) ds \quad (11.110)$$

Donde γ es un número real tal que la región en la que se integra es aquella donde está definida la transformada.

11.12.2. Algunas transformadas útiles

Como se puede ver en las secciones anteriores, tanto realizar una transformada de la Laplace como invertirla³ a través de las integrales es un proceso muy engorroso, por lo que suele ser más sencillo conocer una serie de transformadas de antemano. En la siguiente tabla se recogen las más útiles.

³Especialmente invertirla

Table of Laplace Transform Pairs		
	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso Unitário $\delta(t)$	1
2	Degrau Unitário $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at}, (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\text{cosh } \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$

Figura 11.10: Transformadas de Laplace más utilizadas

Es posible demostrar todas estas transformadas, y se hace detalladamente en métodos matemáticos VI.

11.12.3. Propiedades de la transformada

Ahora introduciremos una serie de propiedades de la transformada de Laplace. A lo largo de este apartado utilizaremos que $f(t)$ y $g(t)$ funciones complejas de variable real tales que admiten transformada de Laplace, y $f(s)$ y $\tilde{g}(s)$ serán sus transformadas.

Linealidad:

Si α y β son números complejos, se cumple que

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \tilde{f}(s) + \beta \tilde{g}(s) \quad (11.111)$$

Traslaciones de tiempo y frecuencia. Reescalado del tiempo Si a es un número real, se cumplen las siguientes propiedades

$$L[e^{at} f(t)] = \tilde{f}(s - a) \quad (11.112)$$

$$L[f(t - a)] = e^{-as} \tilde{f}(s) \quad (11.113)$$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{Si } a \neq 0 \quad (11.114)$$

Transformada del producto de una función por el monomio t^n Si n es un número natural, se verifica la siguiente igualdad

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n \tilde{f}(s)}{ds^n} \quad (11.115)$$

Transformada de la derivada de una función La transformada de Laplace de la n -ésima derivada de una función viene dada por

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \quad (11.116)$$

Transformada de una función multiplicada por $\frac{1}{t}$ Esta propiedad se expresa como

$$L\left[\frac{1}{t} f(t)\right] = \int_s^\infty \tilde{f}(\tau) d\tau \quad (11.117)$$

Convolución de Laplace Definimos la convolución de Laplace de dos funciones de la siguiente manera

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^\infty f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (11.118)$$

Esto resulta útil porque la transformada de una convolución es el producto de las transformadas de las funciones que intervienen en la misma

$$L[f(t) * g(t)] = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s) \quad (11.119)$$

11.12.4. Aplicaciones para la resolución de circuitos

Hasta ahora nos hemos limitado a introducir la transformada y a enunciar sus propiedades, pero hasta ahora no hemos hecho ninguna mención al uso que le vamos a dar. La utilidad de la transformada de Laplace se hace algo más evidente si nos fijamos en la propiedad que nos dice cual es la transformada de una derivada, y es que esta no es más que un polinomio. Así pues, la transformada de Laplace nos permitirá pasar de una ecuación diferencial en el dominio del tiempo a un polinomio en el dominio de la frecuencia compleja. Una vez resuelto el problema en este dominio complejo, podremos realizar una transformada inversa para volver al dominio temporal, habiendo obtenido la solución al problema. Veamos algunos ejemplos de como se puede aplicar esto a casos concretos.

Circuito RC en serie

Consideremos un circuito RC en serie al que se conecta una fuente de potencial que genera una señal en el tiempo cualquiera, a la que llamaremos $v(t)$

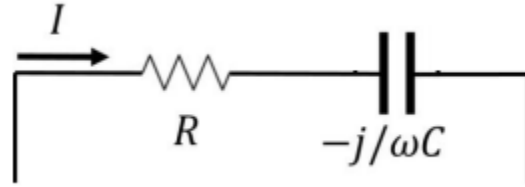


Figura 11.11: Circuito RC serie. La señal de entrada es arbitraria

Al estar los elementos dispuestos en serie, en todo momento se cumplirá que el voltaje de entrada se divide entre la resistencia y el condensador

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) \quad (11.120)$$

Donde v_R es la caída de potencial en la resistencia, y v_C en el condensador. Ahora podemos utilizar la ley de Ohm y la definición de capacidad para escribir

$$v(t) = Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} \quad (11.121)$$

Donde $i(t)$ es la intensidad que circula por el circuito. Además de esto, podemos expresar la carga $Q(t)$ de la siguiente manera

$$Q(t) = Q_0 + \int_0^t i(t) dt \quad (11.122)$$

Sustituyendo en la ecuación para los voltajes, llegamos a la siguiente expresión

$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (11.123)$$

Antes de utilizar la transformada de Laplace, vamos a reescribir esta expresión de un modo que nos será de mayor utilidad, en función de una convolución

$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} i(t) * 1 \quad (11.124)$$

Ahora vamos a aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la igualdad. Empleando la linealidad de la transformada, y la propiedad relacionada con las transformadas de las convoluciones, llegamos a que

$$\tilde{v}(s) = R\tilde{i}(s) + \frac{1}{C} \tilde{i}(s) L[1] \quad (11.125)$$

Consultando la tabla de transformadas

$$\tilde{v}(s) = R\tilde{i}(s) + \frac{\tilde{i}}{sC} \quad (11.126)$$

Reorganizando términos, podemos despejar \tilde{i} y obtener

$$R\tilde{i}(s) = \frac{s\tilde{v}(s)}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{Q_0}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (11.127)$$

Ahora hay que realizar la transformada inversa, y para ello es conveniente manipular esta expresión para obtener una suma de transformadas conocidas. Utilizando que conocemos la función $v(t)$, podemos sumar y restar la cantidad $v(0) \equiv v_0$ en el numerador del primer sumando, obteniendo

$$R\tilde{i}(s) = \frac{s\tilde{v}(s) - v_0 + v_0}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{Q_0}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (11.128)$$

Reorganizando términos, llegamos a

$$R\tilde{i}(s) = \frac{s\tilde{v}(s) - v_0}{s + \frac{1}{RC}} - \frac{Q_0}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} + v_0 \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (11.129)$$

A partir de esta expresión es sencillo invertir la transformada. Procediendo paso a paso, partimos de una propiedad de la transformada para escribir

$$L[e^{-at}f(t)] = \tilde{f}(s+a) \quad (11.130)$$

De lo que se deduce que

$$L^{-1}[f(s+a)] = e^{-at}f(t) \quad (11.131)$$

Si unimos esto al hecho de que $L[1] = \frac{1}{s} \implies L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right] = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.132)$$

Por otro lado, la transformada inversa de la otra función se puede escribir en términos de una convolución

$$L^{-1}\left[\frac{s\tilde{v}(s) - v_0}{s + \frac{1}{RC}}\right] = \frac{dv}{dt} * e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.133)$$

Si definimos $\dot{v}(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt}$ y $\tau = RC$, la solución a este problema para un voltaje arbitrario vendrá dado por

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{R} \int_0^t \dot{v}(\sigma) e^{-\frac{\sigma-t}{\tau}} d\sigma \quad (11.134)$$

O, de forma más compacta

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{R} \dot{v} * e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (11.135)$$

Circuito RL en serie Pensemos ahora en un circuito RL en serie al que le conectamos una fuente de potencial que genera una señal cualquiera a lo largo del tiempo, $v(t)$.

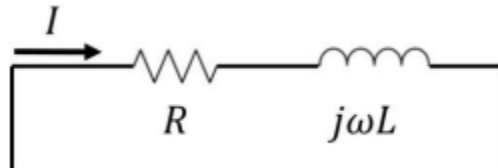


Figura 11.12: Circuito RL en serie

De nuevo, planteamos que el voltaje proporcionado por la fuente se divide entre la resistencia y el inductor

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) \quad (11.136)$$

Utilizando relaciones conocidas, podemos escribir esto de la siguiente manera

$$v(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad (11.137)$$

Ahora, tomando la transformada de Laplace de ambos miembros y utilizando sus propiedades

$$\tilde{v}(s) = R\tilde{i}(s) + sL\tilde{i}(s) - Li_0 \quad (11.138)$$

Donde $i_0 \equiv i(t=0)$. Como en todo momento la intensidad en todos los elementos del circuito es la misma, podemos relacionar la intensidad con el voltaje utilizando la ley de Ohm.

$$i_0 = \frac{v_0}{R} \quad (11.139)$$

Si hacemos esta sustitución y despejamos $\tilde{i}(s)$, llegamos a la siguiente expresión

$$\tilde{i}(s) = \frac{v_0}{R} \frac{1}{s + \frac{R}{L}} + \frac{1}{L} \frac{\tilde{v}(s)}{s + \frac{R}{L}} \quad (11.140)$$

Y deshaciendo la transformada llegamos a la solución general del problema

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-t\frac{R}{L}} + \frac{1}{L} v(t) * e^{-t\frac{R}{L}} \quad (11.141)$$

O, escribiendo la convolución de forma explícita

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-t\frac{R}{L}} + \frac{1}{L} \int_0^t v(\sigma) e^{\frac{R}{L}(\sigma-t)} d\sigma \quad (11.142)$$

Capítulo 12

Líneas de transmisión y antenas

En el tema anterior hemos tratado con circuitos de dimensiones reducidas en las que eran válidas las aproximaciones que dan lugar a los potenciales cuasiestacionarios. Una línea de transmisión es un circuito en el que, en general, estas aproximaciones no serán válidas.

12.1. Introducción a las líneas de transmisión

El modelo más simple de una línea de transmisión se recoge en la siguiente figura

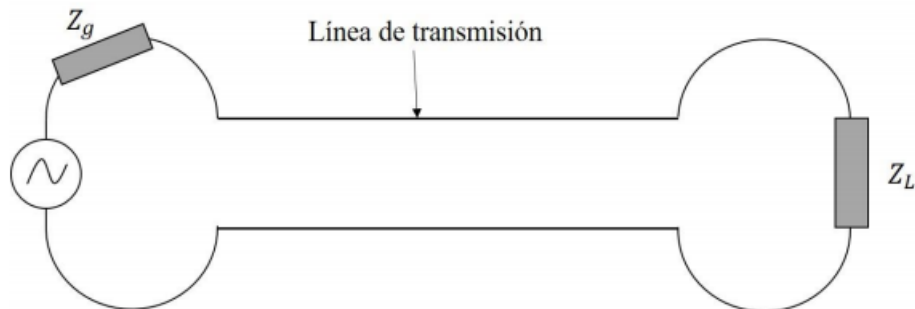


Figura 12.1: Esquema básico de una línea de transmisión

Las líneas de transmisión son utilizadas para intercambiar señales entre lugares alejados. La línea de la figura está formada por dos conductores rectos y paralelos, separados a una distancia mucho más pequeña que su longitud. Al final de cada uno de estos conductores hay una impedancia y/o una fuente de tensión/ intensidad. Debido a la gran separación entre los extremos de una línea de transmisión, las dimensiones de la misma son comparables a la longitud de onda de los campos que se propagan en su interior, por lo que la aproximación de los potenciales cuasiestacionarios ya no es válida, sino que los campos electromagnéticos variarán en magnitud y fase a lo largo de la línea.

A lo largo de este tema, a menos que se diga lo contrario, asumiremos que estamos tratando con campos que varían en el tiempo de forma sinusoidal, de forma que podremos utilizar la notación fasorial.

12.2. Modelo de conductor: línea coaxial

En general, los conductores que forman las líneas de transmisión pueden ser de cualquier tipo, pero uno muy utilizado es el cable coaxial, por lo que vamos a dedicar esta sección a calcular la disposición de los campos en este tipo de conductores. En primer lugar, un cable coaxial tiene la forma que se indica en la figura

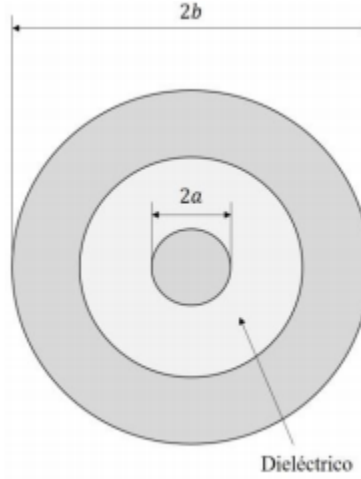


Figura 12.2: Cable coaxial. Los campos se propagan por la región dieléctrica.

Para modelar el avance de una onda electromagnética a lo largo de este cable coaxial (que por comodidad, vamos a alinear con el eje z) vamos a considerar el potencial ϕ en un plano transversal del cable, y una vez calculado, obtendremos el campo eléctrico multiplicando el gradiente de este potencial por un factor ondulatorio

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left[-\nabla \phi e^{j(\omega t - kz)} \right] \quad (12.1)$$

Empecemos entonces a calcular el potencial en un plano, para ello, partiremos de la siguiente ecuación

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (12.2)$$

Ya que no estamos ante distribuciones de carga. Ahora podemos expresar el campo eléctrico en función del potencial escalar y el potencial vector.

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (12.3)$$

De donde se deduce que

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = 0 \quad (12.4)$$

Utilizando el gauge de Coulomb podemos fijar a cero el valor de la divergencia del potencial vector ¹. Si hacemos esto, tendremos que resolver la siguiente ecuación diferencial en coordenadas polares planas

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (12.5)$$

Con las siguientes condiciones de contorno

$$\phi(r = a) = 0 \quad (12.6)$$

¹Es importante darse cuenta de que al hacer esto estamos forzando una situación electrostática a la hora de calcular este potencial, ya que estamos implicando que el potencial escalar no depende del tiempo.

$$\phi(r = b) = \phi_0 \quad (12.7)$$

Para resolver esta ecuación, desarrollemos el operador laplaciano en coordenadas polares planas

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (12.8)$$

Por razones de simetría, el potencial escalar no puede depender de la coordenada φ , por lo que nuestra ecuación diferencial pasa a ser

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \implies r \frac{\partial \phi}{\partial r} = k_1 \quad (12.9)$$

Donde $k_1 = cte \in \mathbb{R}$. Si ahora integramos la ecuación anterior, obtenemos el potencial en función de dos constantes reales

$$\phi(r) = k_1 \ln(r) + k_2 \quad (12.10)$$

Ahora solo tenemos que aplicar las condiciones de contorno, que nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k_1 \ln(a) + k_2 = 0 \\ k_1 \ln(b) + k_2 = \phi_0 \end{cases} \quad (12.11)$$

La solución de este sistema es

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{\phi_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \\ k_2 = -\frac{\phi_0 \ln(a)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \end{cases} \quad (12.12)$$

Y por lo tanto, el potencial será

$$\phi(r) = -\frac{\phi_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln(r) - \frac{\phi_0 \ln(a)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (12.13)$$

Como ya hemos dicho, podemos calcular el campo eléctrico a partir de la siguiente expresión

$$\vec{E}(r, z, t) = \text{Re} \left[-\nabla \phi e^{j(\omega t - kz)} \right] = \text{Re} \left[-\frac{\phi_0}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \hat{r} e^{j(\omega t - kz)} \right] \quad (12.14)$$

Una vez tenemos el campo eléctrico, es sencillo calcular \vec{H} . Para ello, empecemos identificando el fasor asociado al campo eléctrico

$$\vec{E}(r, z) = \frac{\phi_0}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \hat{r} e^{-jkz} \quad (12.15)$$

De las ecuaciones de Maxwell en su forma fasorial, obtenemos la siguiente relación entre los fasores

$$\vec{H} = \frac{j}{\mu\omega} \nabla \times \vec{E} \quad (12.16)$$

Haciendo esta operación (recordando que hay que utilizar el rotacional en coordenadas cilíndricas), obtenemos la siguiente expresión para el campo magnético

$$\vec{H}(r, z) = \frac{k}{\mu\omega} \frac{\phi_0 e^{-jkz}}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \hat{\varphi} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\phi_0 e^{-jkz}}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \hat{\varphi} \quad (12.17)$$

Y tomando la dependencia temporal

$$\vec{H}(r, z, t) = \text{Re} \left[\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\phi_0 e^{j(\omega t - kz)}}{r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \hat{\phi} \right] \quad (12.18)$$

Luego, a lo largo de una línea de transmisión coaxial, los campos electromagnéticos tienen la forma que se indica en la figura.

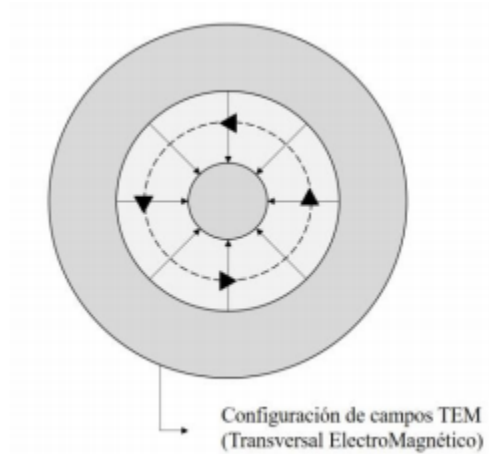


Figura 12.3: Propagación de los campos electromagnéticos en un cable coaxial. Las líneas continuas representan el campo eléctrico, y las discontinuas el magnético.

A este tipo de propagación se la conoce como propagación transversal, y a las ondas resultantes se las llama ondas TEM (transversales electromagnéticas). Siguiendo esta nomenclatura, también podemos definir la impedancia TEM como

$$Z_{TEM} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (12.19)$$

De modo que

$$\vec{H}(r, z) = \frac{\phi_0 e^{-jkz}}{Z_{TEM} r \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \hat{\phi} \quad (12.20)$$

12.3. Modelo de parámetros distribuidos

Ya sabemos que no podemos considerar una línea de transmisión como un circuito ordinario tal y como los que tratábamos en el tema anterior, ya que en ellas no se cumplen las hipótesis de la teoría de circuitos (que los potenciales cuasiestacionarios son una aproximación válida). Sin embargo, sí que podemos utilizar los conceptos del tema anterior para estudiar las líneas de transmisión, pero modificándolos un poco. Para ello, consideremos un fragmento pequeño de la línea.

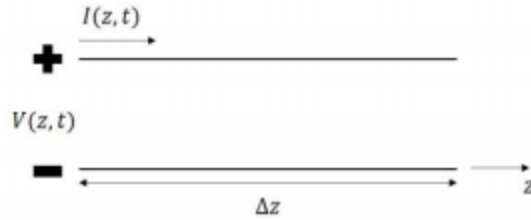


Figura 12.4: Sección pequeña de una línea de transmisión, a lo largo de la cual se transmite una señal alterna $I(z, t)$, suponiendo que la línea está alineada con el eje z .

Ahora, vamos a modelar esta sección de longitud Δz por un circuito equivalente, idéntico a los circuitos del tema anterior, con la salvedad de que ahora no tendremos elementos pasivos, sino que toda la sección contará con "densidades" de estos elementos (tendrá una resistencia por unidad de longitud, una inductancia por unidad de longitud, etc.). El modelo es el siguiente.

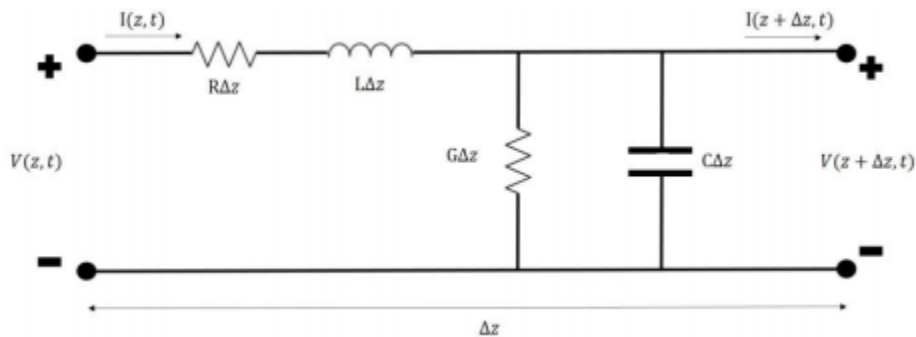


Figura 12.5: Modelo circuital de parámetros distribuidos. Es importante recordar que, aunque estemos representando elementos pasivos de forma individual, en realidad estos representan densidades de resistencia, inductancia, ...

Veamos a que se corresponden cada uno de los parámetros que aparecen en este esquema

Resistencia por unidad de longitud (R):

Es un parámetro relacionado con los conductores que transportan la intensidad, y su interpretación física es la misma que la de una resistencia ordinaria. El hecho de que la conductividad de los conductores sea finita hace que estos se opongan al paso de la corriente.

Inductancia por unidad de longitud (L):

Este parámetro también está relacionado con los conductores, y representa la inductancia mutua entre los dos conductores que forman la línea de transmisión (como el campo que se propaga en uno de ellos afecta al del otro, y viceversa).

Capacidad por unidad de longitud (C):

Este término está relacionado con el dieléctrico que separa ambos conductores, más concretamente con la capacidad del "condensador" formado por los dos conductores separados por el dieléctrico.

Conductancia por unidad de longitud (G):

Recordemos que la conductancia es la inversa de la resistencia $\left(G = \frac{1}{R}\right)$. Este término se

asocia con las pérdidas en el dieléctrico que separa los dos conductores.

Para señales que varían de forma armónica con el tiempo (aquellas que admiten representación fasorial), podemos plantear las leyes de Kirchhoff. En primer lugar, vamos a considerar el circuito equivalente, por simplicidad.

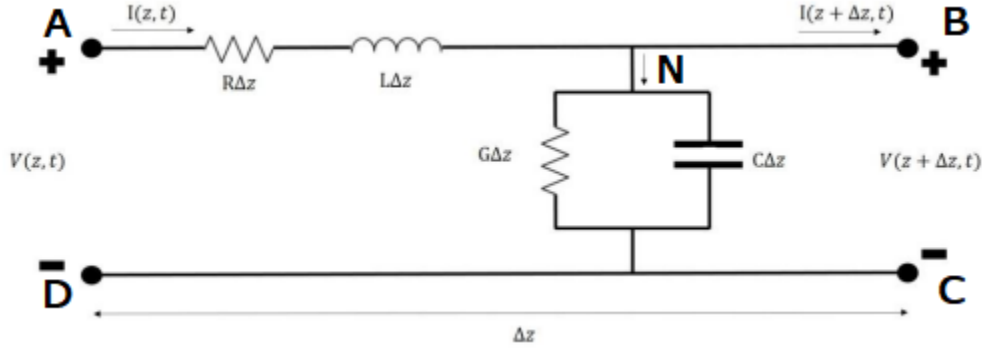


Figura 12.6: Circuito equivalente al de la figura anterior.

Aplicando la ley de las mallas a ABCDA, obtenemos la siguiente ecuación

$$-V(z + \Delta z, t) - I(z, t)(R + j\omega L)\Delta z + V(z, t) = 0 \quad (12.21)$$

Y la ley de los nudos aplicada al nudo N nos lleva a

$$I(z, t) = I(z + \Delta z, t) + V(z + \Delta z, t)(G + j\omega C)\Delta z \quad (12.22)$$

Manipulando las ecuaciones anteriores, podemos llegar a

$$\frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = -I(z, t)(R + j\omega L) \quad (12.23)$$

$$\frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} = -V(z + \Delta z, t)(G + j\omega C) \quad (12.24)$$

Y si ahora tomamos el límite $\Delta z \rightarrow 0$, obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -(R + j\omega L)I(z, t) \quad (12.25)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -(G + j\omega C)V(z, t) \quad (12.26)$$

Para resolver estas ecuaciones, empezamos derivándolas con respecto a z , obteniendo las siguientes expresiones

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = -(R + j\omega L)\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} \quad (12.27)$$

$$\frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z^2} = -(G + j\omega C)\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \quad (12.28)$$

Ahora, como sabemos el valor de las derivadas de I y V con respecto a z (dadas por 12.25 y 12.26), podemos sustituir su valor, y llegamos a que tanto la intensidad como el voltaje cumplen la misma ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C)V(z, t) \quad (12.29)$$

$$\frac{\partial^2 I(z, t)}{\partial z^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) I(z, t) \quad (12.30)$$

Conocemos la solución general a estas ecuaciones diferenciales, ya que son idénticas a las formas fasoriales de la ecuación de ondas que estudiamos en el capítulo 10. Empezando por ejemplo con el voltaje, tendremos que se puede expresar como la superposición de una señal que se propaga en el sentido positivo del eje z , y otra en el sentido negativo.

$$V(z, t) = \text{Re} [Ae^{j\omega t - \gamma z} + Be^{j\omega t + \gamma z}] \quad (12.31)$$

Donde, al igual que en temas anteriores, A y B son números complejos y γ es la constante de propagación compleja

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (12.32)$$

Para hallar la intensidad, podríamos resolver la correspondiente ecuación diferencial, pero es más sencillo utilizar la ecuación 12.25 para escribir

$$I(z, t) = -\frac{1}{(R + j\omega L)} \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \quad (12.33)$$

De donde se obtiene que

$$I(z, t) = \text{Re} \left[\frac{\gamma}{(R + j\omega L)} Ae^{j\omega t - \gamma z} - \frac{\gamma}{(R + j\omega L)} Be^{j\omega t + \gamma z} \right] \quad (12.34)$$

Y si ahora definimos la impedancia característica de la línea de transmisión como

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (12.35)$$

La intensidad se puede escribir como

$$I(z, t) = \text{Re} \left[\frac{A}{Z_0} e^{j\omega t - \gamma z} + \frac{A}{Z_0} e^{j\omega t + \gamma z} \right] \quad (12.36)$$

Por similitud con los campos que obtuvimos en el capítulo 10, sabemos que estas soluciones se corresponden con una superposición de ondas que se propagan en sentidos opuestos de eje z , con una velocidad de propagación, u_p dada por

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (12.37)$$

Al igual que hicimos en temas anteriores, podemos hacer consideraciones con respecto a los materiales utilizados. La más simple de todas es suponer que no existen pérdidas ($R = G = 0$), con lo que tendremos que

$$\alpha = 0 \quad (12.38)$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (12.39)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (12.40)$$

Y por lo tanto

$$u_p = \frac{\omega}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (12.41)$$

Para una determinada línea de transmisión (es decir, una vez se especifica el tipo de conductores con los que estamos trabajando), podemos calcular los parámetros característicos de la línea.

12.3.1. Parámetros distribuidos en una línea coaxial

Vamos a considerar una línea de transmisión formada por dos conductores coaxiales, admitiendo que no existen pérdidas ($G=R=0$), y vamos a calcular el valor de la inductancia y la capacidad por unidad de longitud.

Empezando por la capacidad, pensemos en un fragmento de cable coaxial de longitud Δl . Si la longitud es lo suficientemente pequeña, podemos admitir que la diferencia de potencial entre los dos conductores que lo forman a lo largo de dicho fragmento es aproximadamente constante, y llamaremos a esta constante V_0 . Además, podemos considerar que, en este pequeño fragmento, la dependencia en z de los campos electromagnéticos se hace también despreciable. Así pues, podemos escribir la energía almacenada en este condensador como

$$E = \frac{1}{2} (C\Delta l) V_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon \int_{\tau} E^2 dv \quad (12.42)$$

Sustituyendo el valor de $E(r)$ que calculamos antes en este tema, tendremos que

$$(C\Delta l) V_0^2 = \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r dr \int_0^{\Delta l} dz \frac{V_0^2}{r^2 \ln^2\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (12.43)$$

Y si despejamos C de esta ecuación (la longitud diferencial Δl desaparece al simplificar), obtenemos el siguiente resultado

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (12.44)$$

Se puede hacer exactamente lo mismo con la energía magnética, planteando la integral²

$$\frac{1}{2} (L\Delta l) I_0^2 = \frac{1}{2} \mu \int_{\tau} H^2 dv = \frac{\mu}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r dr \int_0^{\Delta l} dz \frac{I_0^2}{4\pi^2 r^2} \quad (12.45)$$

Realizando la integral y despejando L , obtenemos que

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (12.46)$$

Y por lo tanto, tendremos que

$$\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad (12.47)$$

Y la velocidad de propagación

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \quad (12.48)$$

Y la impedancia característica será

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (12.49)$$

12.4. Coeficiente de reflexión

Pensemos en una línea de transmisión de longitud l , al final de la cual se encuentra la impedancia receptora, Z_L . Ya sabemos que la tensión a lo largo de la línea viene dada por la siguiente ecuación

$$V(z, t) = \text{Re} [Ae^{-\gamma z} e^{j\omega t} + Be^{\gamma z} e^{j\omega t}] \quad (12.50)$$

²Donde hemos supuesto que la intensidad a lo largo de este fragmento de línea no depende de Z , y donde $\frac{I_0}{2\pi} = \frac{V_0}{Z_{TEM}}$

Definimos el coeficiente de reflexión, ρ , como el cociente entre los coeficientes que acompañan a la onda que se propaga en dirección $-Z$ y la que se propaga en dirección $+Z$ (a partir de ahora las llamaremos onda reflejada y onda incidente, respectivamente), cuando $z = l$.

$$\rho \equiv \frac{Be^{\gamma l}}{Ae^{-\gamma l}} = |\rho| e^{j\varphi} \in \mathbb{C} \quad (12.51)$$

Vamos a trabajar un poco con esta definición. Para ello, consideremos el fasor que representa el potencial en la línea

$$V(z) = Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z} \quad (12.52)$$

Cuando $z = l$, tendremos que

$$V(l) = Ae^{-\gamma l} + Be^{\gamma l} \quad (12.53)$$

Que se puede expresar en función del coeficiente de reflexión

$$V(l) = Ae^{-\gamma l} + \rho Ae^{-\gamma l} = (1 + \rho) Ae^{-\gamma l} \quad (12.54)$$

Por otro lado, en ese mismo punto, el fasor intensidad será

$$I(l) = \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{B}{Z_0} e^{\gamma l} = (1 - \rho) \frac{A}{Z_0} e^{-\gamma l} \quad (12.55)$$

Si ahora nos fijamos en este final de la línea



Figura 12.7: Situación al final de la línea, donde $I(l)$ incide sobre Z_L

La forma fasorial de la ley de Ohm nos dice que

$$V(l) = I(l) Z_L \quad (12.56)$$

Sustituyendo los valores de los fasores, tendremos que

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (12.57)$$

Y si de la ecuación anterior despejamos el coeficiente de reflexión

$$\rho = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (12.58)$$

Se puede ver que en el caso $Z_0 = Z_L$, el coeficiente de reflexión se anula, y por lo tanto no existe señal reflejada. Cuando se da esta situación se dice que la línea de transmisión está adaptada.

12.5. Relaciones de tensión

Supongamos que tenemos una línea de transmisión desadaptada ($Z_0 \neq Z_L$). En este caso, $\rho \neq 0$, y existirán tanto una onda transmitida como una reflejada. Esto generará un patrón de interferencia a lo largo de la línea, con el voltaje (y la intensidad) adoptando valores máximos en los puntos en que la onda reflejada y la transmitida estén en fase, y valores mínimos cuando están en oposición de fase. Estos valores máximos y mínimos vendrán dados por

$$|V_{max}| = |A| + |B| = |A| \left(1 + \frac{|B|}{|A|} \right) \quad (12.59)$$

$$|V_{min}| = ||A| - |B|| = \left| |A| \left(1 - \frac{|B|}{|A|} \right) \right| \quad (12.60)$$

Definimos la razón de onda estacionaria, S , como el cociente entre el voltaje máximo y el voltaje mínimo

$$S \equiv \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \left| \frac{1 + \frac{|A|}{|B|}}{1 - \frac{|A|}{|B|}} \right| \quad (12.61)$$

Que se puede expresar de manera más elegante en términos del coeficiente de reflexión

$$S = \left| \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \right| \quad (12.62)$$

Ahora, como sabemos que $|\rho| \in [0, 1]$, entonces $S \in [0, \infty)$. Destacar que cuando tenemos una onda estacionaria ($\rho = 1$), la razón de onda estacionaria se hace infinita.

12.6. Antenas y campos lejanos

Imaginemos que tenemos unas fuentes, que podemos modelar mediante una determinada distribución de corrientes, y que nos interesa calcular el campo electromagnético en puntos muy alejados de estas fuentes. En esta sección veremos como abordar este problema

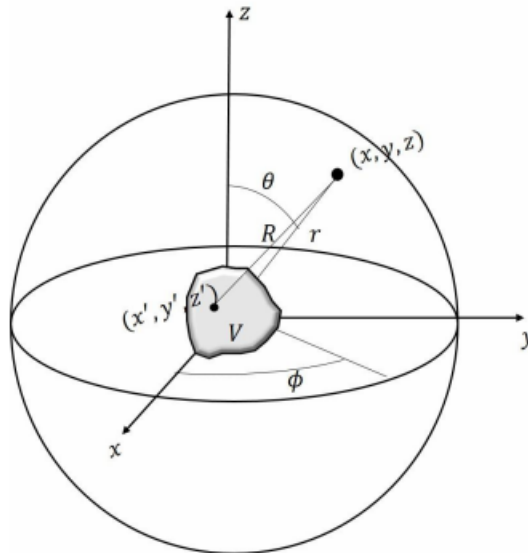


Figura 12.8: Esquema del problema. Consideremos fuentes que varían de forma armónica con el tiempo y que están confinadas en un volumen finito V .

Por mayor comodidad, vamos a definir $R \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$. Por otro lado, que las fuentes varíen de forma armónica implica que las podemos modelar mediante una distribución de corrientes que admite representación fasorial

$$\vec{J}(x, y, z, t) = \text{Re} \left[\vec{J}(x, y, z) e^{j\omega t} \right] \quad (12.63)$$

Si ahora recurrimos a la ecuación 10.111, podemos escribir el potencial vector de la siguiente manera

$$\vec{A}(x, y, z, \lambda) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(x, y, z, \lambda) dv'}{R} \quad (12.64)$$

Recordando que $\lambda = t - R\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ es el tiempo retardado. Escribiendo la expresión de $\vec{J}(x, y, z, \lambda)$ en función del fasor, tendremos que

$$\vec{A}(x, y, z, \lambda) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{Re} \left[\int_V \frac{\vec{J}(x, y, z) e^{j\omega\lambda} dv'}{R} \right] \quad (12.65)$$

Y teniendo en cuenta que

$$j\omega\lambda = j\omega t - j\omega R\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = j(\omega t - kR) \quad (12.66)$$

Podemos escribir el potencial vector como

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{Re} \left[\int_V \frac{\vec{J}(x, y, z) e^{j(\omega t - kR)} dv'}{R} \right] \quad (12.67)$$

Inspeccionando la ecuación anterior es sencillo obtener el fasor que representa el potencial vector

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(x, y, z) e^{-jkR} dv'}{R} \quad (12.68)$$

A partir de este fasor, podemos calcular el fasor que representa el campo magnético

$$\vec{B}(x, y, z) = \nabla \times \vec{A}(x, y, z) \quad (12.69)$$

Para calcular el campo eléctrico podríamos hacer lo mismo, pero para ello necesitaríamos la función $\phi(x, y, z, t)$, que dependerá de la distribución de cargas en las fuentes. Para evitar tener que usarlas, podemos emplear la forma fasorial de la ecuación de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \omega j \vec{E} \quad (12.70)$$

En nuestro punto lejano, estamos lo suficientemente alejados de las fuentes como para considerar $\vec{J} = 0$, de modo que

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{c^2}{j\omega} \left(\nabla \times \nabla \times \vec{A}(x, y, z) \right) \quad (12.71)$$

Y ya hemos calculado el fasor campo eléctrico sin necesidad de conocer la distribución de cargas en las fuentes.

Ahora vamos a introducir la aproximación de campo lejano que consiste en encontrar una mejor expresión para R . Empezando por su definición

$$R \equiv \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.72)$$

Si expresamos x, y, z en coordenadas esféricas y manipulamos la expresión anterior, llegamos a la siguiente forma para R

$$R = r \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{2}{r} (x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.73)$$

En primer lugar, sabiendo que $r' \ll r$, podemos aproximar R por

$$R \approx r \left[1 - \frac{2}{r} (x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.74)$$

Si ahora renombramos $\mathcal{L} \equiv (x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta)$, tendremos que

$$R \approx r \left[1 - \frac{2}{r} \mathcal{L} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12.75)$$

Si ahora consideramos la expansión en serie de Taylor en torno a $\mathcal{L} = 0$, podemos escribir R como

$$R \approx r - (x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta) + \mathcal{O}(r^{-1}) \quad (12.76)$$

Donde con $\mathcal{O}(r^{-1})$ nos referimos a los términos de orden r^{-n} , con $n \geq 1$. Si consideramos que estos términos son despreciables, podemos aproximar el fasor que representa el potencial vector como

$$\vec{A}(x, y, z) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} e^{-jkr} \int_V \frac{\vec{J}(x, y, z) e^{jk\mathcal{L}}}{r - \mathcal{L}} dv' \quad (12.77)$$

Si ahora consideramos que $r - \mathcal{L} \approx r$, podemos escribir que

$$\vec{A}(x, y, z) \approx \frac{\mu_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \int_V \vec{J}(x, y, z) e^{jk\mathcal{L}} dv' \quad (12.78)$$

Y el campo dependiente del tiempo será, de manera aproximada

$$\vec{A}(x, y, z, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \text{Re} \left[e^{-jkr} \int_V \vec{J}(x, y, z) e^{jk\mathcal{L}} dv' \right] \quad (12.79)$$

Lo interesante de estas aproximaciones es que hemos conseguido expresar el fasor potencial vector como el producto de dos funciones

$$\vec{A}(x, y, z) \approx \mathcal{E}(r) a(\theta, \varphi) \quad (12.80)$$

Donde \mathcal{E} es un fasor que representa una onda esférica

$$\mathcal{E}(r) = \frac{\mu_0 e^{-jkz}}{4\pi r} \quad (12.81)$$

Y $a(\theta, \varphi)$ es una función direccionalmente ponderada

$$a(\theta, \varphi) = \int_V \vec{J}(x, y, z) e^{jk\mathcal{L}} dv' \quad (12.82)$$

Esta función direccional tiene una importante relación con la potencia radiada por la antena. Para ello, vamos a calcular el valor promedio del vector de Poynting a partir de los fasores

$$\langle \vec{S} \rangle \equiv \vec{P}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \quad (12.83)$$

Empecemos calculando los fasores \vec{E} y \vec{H}

$$\vec{E} = \frac{c^2}{j\omega} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (12.84)$$

Que utilizando identidades vectoriales se puede escribir como

$$\vec{E} = j\omega\hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{A}) \quad (12.85)$$

Si ahora definimos el vector $\vec{A}_T \equiv A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}$, el fasor campo eléctrico será

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A}_T \quad (12.86)$$

Por otro lado, el fasor campo \vec{H} viene dado por

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} \quad (12.87)$$

Que utilizando identidades vectoriales se convierte en

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \frac{-j\omega}{\eta} \hat{r} \times \vec{A} = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times \vec{E} \quad (12.88)$$

Donde η es la impedancia intrínseca del medio (en este caso, del vacío). De estas ecuaciones se deduce que los campos son completamente transversales (no vibran en la dirección de \hat{r}), y que ambos campos son perpendiculares. La expresión de los fasores en función de \mathcal{E} y $a(\theta, \varphi)$ es la siguiente

$$\vec{E} = -j\omega\mathcal{E}(r) (a_\theta\hat{\theta} + a_\varphi\hat{\varphi}) \quad (12.89)$$

$$\vec{H} = -\frac{j\omega\mathcal{E}(r)}{\eta} (a_\theta(\hat{r} \times \hat{\theta}) + a_\varphi(\hat{r} \times \hat{\varphi})) \quad (12.90)$$

Y desarrollando los productos vectoriales entre versores, tendremos que el fasor campo magnético será

$$\vec{H} = -\frac{j\omega\mathcal{E}(r)}{\eta} (a_\theta\hat{\varphi} - a_\varphi\hat{\theta}) \quad (12.91)$$

Por lo tanto, tendremos que, en el caso de que $\eta \in \mathbb{R}$, como en el vacío

$$\vec{H}^* = \frac{j\omega\mathcal{E}^*(r)}{\eta} (a_\theta^*\hat{\varphi} - a_\varphi^*\hat{\theta}) \quad (12.92)$$

Y así

$$\vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{\omega^2 |\mathcal{E}(r)|^2}{\eta^2} (a_\theta a_\theta^* + a_\varphi a_\varphi^*) \hat{r} \quad (12.93)$$

Y por lo tanto, podremos escribir la potencia media radiada en función de las componentes de $a(\theta, \varphi)$

$$\vec{\mathcal{P}}(r, \theta, \varphi) = \frac{\mu_0^2 \omega^2}{32\pi^2 r^2 \eta} (|a_\theta|^2 + |a_\varphi|^2) \hat{r} \quad (12.94)$$

A la parte de la potencia radiada relacionada con la componente θ de a se lo conoce como patrón θ -polarizado, y al relacionado con la componente φ , patrón φ -polarizado.

Bibliografía

- [1] D. J. Griffiths: *Introduction to electrodynamics (Fourth edition)*. Reed College, 2013
- [2] J. D. Jackson: *Classical electrodynamics (Fourth edition)*. John Wiley & sons
- [3] R. K. Wangsness: *Campos electromagnéticos*. Noriega editores
- [4] F. J. Ares Pena: *Apuntes de la asignatura*. Universidad de Santiago de Compostela